



GeoGebra y el modelo de Van Hiele para el desarrollo de teoremas geométricos

Carlos Vicente Llerena Aguilar¹

Fabrizio Logiurato²

Juan Francisco Tlapanco-Limón³

Universidad Regional Amazónica IKIAM

1 Se graduó en el 2008, en la Universidad Técnica de Ambato, como Ingeniero Mecánico. Es egresado de la maestría de Enseñanza de la Matemática en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Actualmente es Técnico Docente de la Universidad Regional Amazónica IKIAM. carlos.llerena@ikiam.edu.ec

2 En el 2007 en la Universidad de Trento (Italia) obtuvo su Doctorado en Enseñanza de la Física y Fundamentos de la Física Cuántica. En Italia se desempeñó como Profesor Auxiliar de la Universidad de Trento. Actualmente es Profesor Principal de la Universidad Regional Amazónica IKIAM. fabrizio.logiurato@ikiam.edu.ec

3 Se doctoró en el 2010 en Física Teórica, por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Dentro de sus intereses académicos se encuentran los métodos geométricos de cuantización, el fortalecimiento de la formación científico-tecnológica y la divulgación de la ciencia. Actualmente es profesor y coordinador en la Facultad de Ciencias, Ingenierías y Construcción (FCIC) en la UTE. juan.tlapanco@ute.edu.ec

Resumen

La presente investigación se enmarca en el campo de la enseñanza de la geometría euclidiana y no euclidiana. La estructura de enseñanza-aprendizaje propuesta está basada en el uso del software dinámico GeoGebra y del modelo de razonamiento de Van Hiele. Los resultados alcanzados a través de nuestra experimentación didáctica con estudiantes de educación superior muestran que al final de su aplicación, más del 50% de estudiantes desarrollaron capacidades para demostrar teoremas de forma rudimentaria y que más del 30% lograron demostrarlos de forma justificada. La metodología algorítmica desarrollada en este proceso es flexible y brinda la posibilidad de crear nuevos recursos dinámicos para las demostraciones de otros teoremas, por ejemplo, en el campo de la geometría elíptica, proyectiva y fractal.

Palabras clave: Enseñanza, Geometría, GeoGebra, Modelo de Van Hiele, Teoremas.

GeoGebra and the Van Hiele model for the development of geometric theorems

Abstract

This research is about the teaching of Euclidean and non-Euclidean geometry. Our proposed teaching-learning structure is based on the use of the GeoGebra dynamic software and the Van Hiele reasoning model. The results achieved through our didactic experimentation, with higher education students, show that, at the end of its application, more than 50% of students developed skills to demonstrate theorems in a rudimentary way, and that more than 30% managed to demonstrate them in a justified way. The algorithmic methodology developed in this process is flexible and offers the possibility of creating new dynamic resources for the demonstrations of other theorems, for example, in the field of elliptical, projective and fractal geometry.

Keywords: Teaching, Geometry, GeoGebra, Van Hiele model, Theorems.

Introducción

La aparición de las tecnologías digitales revolucionó a la humanidad y, por ende, al sistema educativo. En este sentido, el software dinámico permite generar un ambiente que re dimensiona la forma de percibir la naturaleza de los objetos, cuestionando las formas tradicionales de enseñanza de las matemáticas. En particular, GeoGebra permite dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas; sus construcciones son dinámicas, pues estas permiten interactuar (mover, modificar...) con construcciones ya realizadas. Además, este software funciona como un mediador semiótico que activa la motivación y participación de los estudiantes (García, 2011).

No existe un solo camino para conseguir el éxito pedagógico, sino más bien hay que considerar las interacciones dinámicas con las metas cognoscitivas y sociales. Por eso, aparecen varios modelos de enseñanza-aprendizaje que estructuran un plan que configura el currículo para diseñar materiales didácticos que reorientan todo proceso pedagógico en el aula (Varcarcél, 2004). Uno de los más citados modelos de enseñanza-aprendizaje es el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. En la actualidad, dicho modelo es usado como objeto de estudio para organizar unidades de enseñanza, evaluar procesos de los estudiantes y aportar pautas, además se utiliza para la organización del currículo bajo el enfoque constructivista (Gutiérrez, 2011).

Metodología

Esta investigación se enfocó en probar la efectividad que genera en el aula, un modelo de enseñanza-aprendizaje que involucra el software dinámico GeoGebra y el modelo de razonamiento de Van Hiele, aplicado a la enseñanza de las demostraciones de la geometría euclidiana (Llerena, 2019). Para probar la efectividad de la metodología propuesta se trabajó con estudiantes, divididos en un grupo de control y otro experimental con el que se desarrolló esta propuesta didáctica.

Figura 1.



Figura 1. Representación modelo de investigación

Diseño de recursos didácticos

Los recursos didácticos conforman el eje central del modelo de enseñanza-aprendizaje del proceso investigativo. Mientras que para el grupo de control se estableció una metodología tradicional con el uso de instrumentos geométricos tradicionales (regla, adras, graduador compás), para el grupo experimental se reemplazaron estos instrumentos por recursos didácticos generados por el software dinámico GeoGebra. La utilización del programa y la construcción de tales recursos didácticos se sintetizan en las siguientes fases:

- **Representación del teorema geométrico**

En la construcción del axioma o teorema geométrico se prioriza la presentación de los elementos básicos involucrados, que son construidos directamente en la interfaz gráfica de GeoGebra.

- **Dinamización del teorema geométrico**

La construcción geométrica plana desarrollada en el entorno de GeoGebra es dinamizada con áreas, líneas, segmentos de rectas, ángulos y puntos, controlados por medio de deslizadores que ayudan a visualizar las propiedades y características del teorema.

- **Creación de la secuencia de aprendizaje**

En función de un teorema geométrico se diseñan preguntas abiertas que llevan al estudiante a un proceso de reflexión. Este paso es fundamentado en los elementos geométricos dinamizados, que le permiten al estudiante escalar por los niveles de razonamiento de Van Hiele: visualización, análisis, clasificación y deducción formal. Las preguntas inducen a explorar, descubrir, caracterizar, conjeturar y demostrar atributos y propiedades de la construcción geométrica. La tabla 1 muestra las cualidades y propiedades características de los primeros cuatro niveles de razonamiento de Van Hiele.

Tabla 1.

Tabla 1. Niveles del modelo de razonamiento de Van Hiele

Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
	Visualización	Análisis	Clasificación	Deducción formal
Reconocimiento y descripción	Atributos físicos (posición, forma, tamaño)	Propiedades matemáticas	_____	_____

Uso de definiciones	_____	Definiciones con estructura simple	Definiciones con estructuras matemáticas complejas	Aceptar definiciones equivalentes
Formulación de definiciones	Listado de propiedades físicas	Listado de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias suficientes	Prueba la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos	Exclusiva basada en atributos matemáticos	Con diferentes definiciones exclusivas e inclusivas	_____
Demostración	_____	Verificación con ejemplos y demostraciones empíricas	Demostraciones lógicas informales	Demostración matemática formal

Fuente: Aravena & Caamaño (2013)

• Disposición y funcionamiento de la secuencia de aprendizaje

La metodología propuesta involucra preguntas abiertas y ligadas al teorema geométrico que buscan el descubrimiento y entendimiento gradual de axiomas y propiedades hasta llegar a su demostración. Para tener una visión conjunta se ha dispuesto su ubicación en el área gráfica del entorno de GeoGebra, al costado derecho de la construcción geométrica, evitando intersecciones con las líneas. Cada pregunta está regulada por una casilla de control que permite encriptar información de la construcción o de su respuesta. Las preguntas deben ser activadas de forma secuencial, dando un tiempo para que el estudiante razone y exponga sus ideas. Un ejemplo se muestra en la figura 2.

Figura 2.

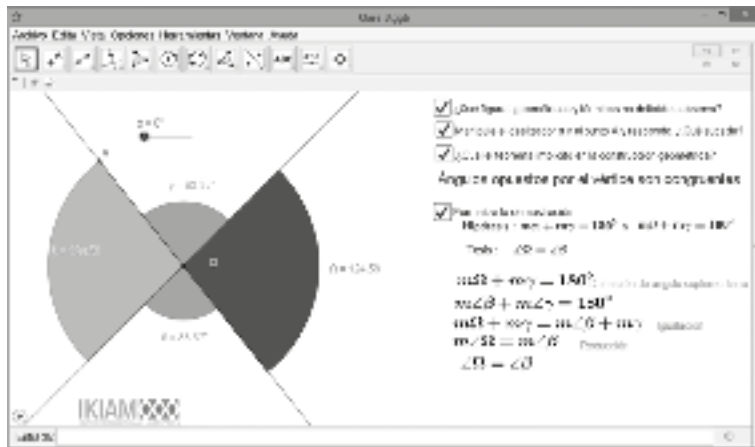


Figura 2. Teorema: los ángulos opuestos por el vértice son congruentes

- **Proceso de experimentación**

El proceso de experimentación se dio en dos tiempos: el primero se aplicó a una muestra de estudiantes de nivelación de la Universidad Regional Amazónica IKIAM y el segundo, a una muestra de estudiantes de inicio de carrera del Instituto Tecnológico Superior Tena. La elección de los temas para el proceso de experimentación fueron tomados en función tanto del contenido temático como del texto guía (Geometría Plana de G. Calvache) descritos en el sílabo de matemáticas del programa de Nivelación de la Universidad IKIAM. El contenido seleccionado fue el siguiente: ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos opuestos por los vértices, propiedades de los ángulos formados por dos rectas cortadas por una transversal, propiedades de los ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes, propiedades de los ángulos en los triángulos y de las bisectrices de estos.

Resultados

De las experiencias realizadas en las dos Instituciones de Educación Superior se probó que inicialmente los grupos de control e investigación formaron parte de un mismo grupo de estudio y que, luego de la aplicación de las metodologías de enseñanza-aprendizaje se diferenciaron en el nivel de razonamiento geométrico.

Figura 3.

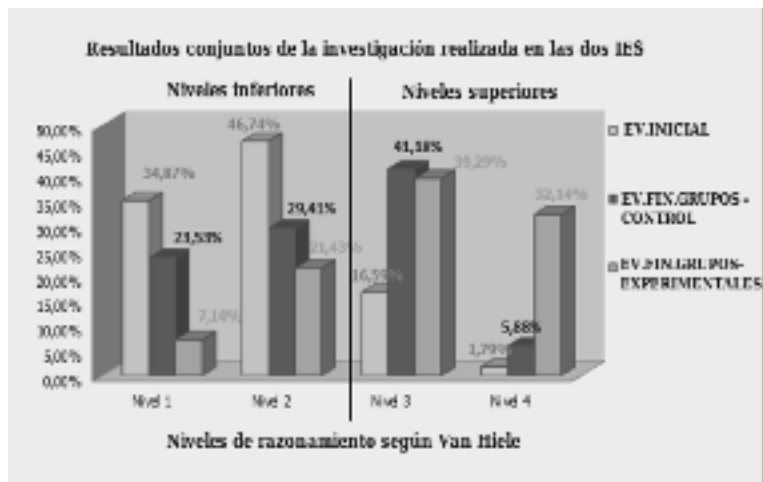


Figura 3. Resultados de los grupos en el proceso de investigación de las IES⁴

En la evaluación final, representada en la figura 3, se aprecia que la concentración de estudiantes en los niveles de razonamiento geométrico 1 y 2 de los grupos de control, corresponde a 9 estudiantes con un equivalente del 52,94% del total. Mientras que la suma de los grupos de investigación fue de 8 estudiantes correspondiente al 28,57% del total.

⁴ IES= Instituciones de Educación Superior. EV= Evaluación. FIN= Final.

La concentración de estudiantes en los niveles de razonamiento geométrico 3 y 4 del grupo de control fue de 8 estudiantes, esto es el 47,18% del total, mientras que en el grupo experimental de 20 estudiantes el equivalente es el 71,43% del total. En el estudio del fortalecimiento del razonamiento geométrico, la metodología con uso de software dinámico desarrollada en el grupo experimental, difiere de forma favorable en un 24,37%, frente a la metodología tradicional (desarrollada con el grupo de control de la Amazonía).

En la misma figura se puede visualizar que más del 75% del total de estudiantes que participaron en la evaluación inicial se ubican en los niveles inferiores del modelo de razonamiento de Van Hiele. En la evaluación final del grupo de control el porcentaje se reduce alrededor del 50%; y del grupo experimental el porcentaje baja a menos del 30%.

La metodología con uso de software dinámico desarrollada en el grupo experimental permitió variar aproximadamente un 45% de los niveles inferiores a los niveles superiores del modelo de razonamiento de Van Hiele: aproximadamente 20% más que la metodología tradicional. Adicionalmente, aporta a ubicar a más del 50% de los estudiantes en los niveles superiores del modelo de Van Hiele y a más del 30% en el nivel máximo.

Conclusiones

En la metodología de enseñanza-aprendizaje propuesta para el tratamiento de las demostraciones geométricas Euclidianas se diseñó un esquema algorítmico que permitió representar los teoremas por medio del software dinámico GeoGebra. En los recursos didáctico-tecnológicos, creados en el entorno de GeoGebra, los procesos de reflexión y su maduración fueron medidos a través de preguntas diseñadas para el establecimiento del nivel alcanzado en la escala de Van Hiele. Por medio de dos etapas de experimentación se probó la efectividad de la metodología de enseñanza-aprendizaje en el tratamiento de las demostraciones Euclidianas.

La investigación generó un útil recurso dinámico para la enseñanza de 9 teoremas Euclidianos. Sin embargo, la metodología algorítmica presentada es flexible y brinda la posibilidad de crear nuevos recursos de cualquier teorema que pueda ser representado por medio de una figura. Se proyecta como una investigación interesante al extender al abordaje de las demostraciones en el campo de la geometría hiperbólica, elíptica, descriptiva, espacial, proyectiva y fractal. Además, nuestro proceso de investigación busca generar instructivos para profesores de educación básica que aprovechen la facilidad de uso de la interfaz gráfica de GeoGebra y así crear un nuevo material para capacitación y actualización de docentes de instrucción básica para la Amazonía ecuatoriana.

Referencias bibliográficas

- Adela, J. P., & Gutiérrez A. (2009). *Una Propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele*. Sevilla: Alfar.
- Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de Establecimientos Municipalizados. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 173.
- Calvache, G. (2009). *Geometría*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- García, T. (2011). *La Geometría Dinámica como Herramienta Didáctica para el Dibujo*. Cantabria: Universidad de Cantabria.
- Llerena, C. (2019). *Demostraciones geométricas, euclidianas y no euclídeas medidas por software dinámico, evaluadas bajo el modelo de Van Hiele en el proceso de nivelación emblemática. (Trabajo de fin de Mastet)*. Quito: Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.
- Martínez, N. (2004). Los modelos de enseñanza y la práctica de aula. *Enseñanza Aprendizaje, Evaluación y Memoria Educativa*, 19.