



**UNAE**  
**UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN**

**Carrera de:**

Educación Básica

Itinerario Académico en: Pedagogía de la Matemática

**“Estrategia de enseñanza basada en semiótica para el  
aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la  
Educación General Básica del Ecuador”**

Trabajo de Integración Curricular  
previo a la obtención del título de  
Licenciada en Ciencias de la  
Educación Básica

**Autora:**

Tannya Andreina Tene Tenempaguay

C.I 030271184-1

**Tutor:**

PhD. Miguel Alejandro Orozco Malo

C.I 015199833-3

**Azogues - Ecuador**  
**Septiembre, 2020**

## Resumen

En el aprendizaje de funciones matemáticas, la población estudiantil necesita construir, comprender y utilizar conceptos. Lograrlo es difícil, porque un concepto matemático tiene diferentes formas de representación, su significado es parcial y se requiere tiempo para practicar-emplear en la vida académica y social. A tal razón, la presente investigación propone una estrategia de enseñanza basada en semiótica matemática para el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador en el tema de funciones. La estrategia contiene seis fases: observación, análisis, transformación, interpretación, deducción y explicación que permiten abordar el concepto de función en conexión con sus diferentes sistemas de representación, para que la población estudiantil conozca y valore la semiótica matemática en el proceso de aprendizaje. Además, la transformación de una función a sus diferentes formas: algebraica, tabular, gráfica y verbal, contribuye a la comunicación, actividad y al aprendizaje de las Matemáticas.

La propuesta fue construida con base a los resultados obtenidos en las observaciones y en las encuestas realizadas a los docentes de matemáticas en el tema de funciones. Incluye los resultados obtenidos desde el análisis de los textos del Ministerio de Educación, Currículo Nacional, PCI, PCA y PUD. Además, la propuesta consideró los registros semióticos de Duval (1999), la jerarquía de comprensión de Van Hiele (1999) y el modelo de resoluciones de problemas de Pólya (1945). La propuesta es una mejora para el proceso de la enseñanza-aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador.

**Palabras claves:** estrategia de enseñanza, semiótica matemática, aprendizaje matemático, funciones.

### **Abstract**

In learning math functions, the student population needs to build, understand and use the concept. Achieving this is difficult, because a mathematical concept has different forms of representation, its meaning is partial and it takes time to practice-use in academic and social life. For this reason, the present investigation proposes a teaching strategy based on mathematical semiotics for the Higher level of Basic General Education of Ecuador in the topic of functions. The strategy contains six phases: observation, analysis, transformation, interpretation, deduction and explanation that allow the concept of function to be approached in connection with its different systems of representation, so that the student population values mathematical semiotics in the learning process. Furthermore, the transformation of a function into its different forms: algebraic, tabular, graphic and verbal, contributes to communication activity and learning of Mathematics.

The proposal was built based on the results obtained in the observations and in the surveys carried out to the mathematics teachers on the topic of functions. It includes the results obtained from the analysis of the texts of the Ministry of Education, national curriculum, PCI, PCA and PUD. In addition, the proposal considered the semiotic registers of Duval (1999), the hierarchy of understanding of Van Hiele (1999) and the problem solving model of Poyla (1945). The proposal is an improvement for the teaching-learning process of functions in the Superior sublevel of Basic General Education of Ecuador.

**Keywords:** teaching strategy, semiotics of mathematics, math learning, functions.

## Índice del trabajo

<b>ABSTRACT.....</b>	<b>3</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>8</b>
<b>1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>9</b>
<b>1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>11</b>
<b>1.3 JUSTIFICACIÓN .....</b>	<b>12</b>
<b>1.4 OBJETIVOS .....</b>	<b>13</b>
<b>1.5 ANTECEDENTES .....</b>	<b>14</b>
<b>1.6 ESTRUCTURA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN .....</b>	<b>17</b>
<b>2. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1 EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SEMIÓTICA .....</b>	<b>19</b>
<b>2.2 SEMIOSIS Y NOESIS.....</b>	<b>24</b>
<b>2.3 LA FUNCIÓN .....</b>	<b>24</b>
<b>2.4 REGISTROS SEMIÓTICOS DE UNA FUNCIÓN.....</b>	<b>26</b>
<b>2.5 ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE FUNCIONES .....</b>	<b>33</b>
<b>2.6 NIVELES DE COMPRENSIÓN DE VAN HIELE.....</b>	<b>35</b>
<b>3. MARCO METODOLÓGICO .....</b>	<b>38</b>
<b>4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....</b>	<b>44</b>
<b>4.1 OBSERVACIÓN PARTICIPANTE.....</b>	<b>44</b>
<b>4.2 ENCUESTA A LOS DOCENTES.....</b>	<b>45</b>
<b>4.3 CURRÍCULO NACIONAL .....</b>	<b>54</b>
<b>4.4 PLANIFICACIÓN CURRICULAR INSTITUCIONAL .....</b>	<b>56</b>
<b>4.5 PLANIFICACIONES CURRICULARES ANUALES .....</b>	<b>59</b>
<b>4.6 PLANIFICACIONES DE UNIDAD DIDÁCTICA .....</b>	<b>64</b>
<b>4.7 TEXTOS DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN .....</b>	<b>67</b>
<b>4.8 TRIANGULACIÓN DE TÉCNICAS .....</b>	<b>86</b>
<b>5. PROPUESTA DEL PROYECTO .....</b>	<b>89</b>



<b>5.1 INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>89</b>
<b>5.2 OBJETIVO DE LA PROPUESTA .....</b>	<b>90</b>
<b>5.3 METODOLOGÍA DE LA PROPUESTA.....</b>	<b>90</b>
<b>5.4 ELEMENTOS CURRICULARES DE LA PROPUESTA .....</b>	<b>91</b>
<b>5.5 DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA .....</b>	<b>92</b>
<b>5.6 FASES DE LA PROPUESTA .....</b>	<b>93</b>
<b>6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>99</b>
<b>7. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>102</b>
<b>8. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>103</b>
<b>9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>104</b>
<b>10. ANEXOS .....</b>	<b>112</b>



### Índice de tablas

<b>TABLA 1</b> ELEMENTOS CURRICULARES DEL TEMA FUNCIONES .....	55
<b>TABLA 2</b> PLANIFICACIONES CURRICULARES ANUALES .....	59
<b>TABLA 3</b> REGISTROS SEMIÓTICOS DE FUNCIÓN .....	69
<b>TABLA 4</b> MATRIZ DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS EN EL TEMA DE FUNCIONES.....	74
<b>TABLA 5</b> ACTIVIDADES PROPUESTAS DE LOS TEXTOS DEL 8º, 9º Y 10º GRADO .....	82
<b>TABLA 6</b> PROBLEMAS DE CONVERSIÓN PROPUESTOS EN LOS TALLERES .....	84
<b>TABLA 7</b> TRIANGULACIÓN DE LAS TÉCNICAS .....	87

## Índice de figuras

FIGURA 1. ENSEÑANZA DE LA SEMIÓTICA MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES .....	19
FIGURA 2. CONVERSIÓN DE LOS REGISTROS DE UNA FUNCIÓN .....	26
FIGURA 3. REGISTRO GRÁFICO EN UN PLANO CARTESIANO .....	28
FIGURA 4. REGISTROS TABULARES DE UNA FUNCIÓN .....	30
FIGURA 5. TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN.....	31
FIGURA 6. TABLA DE VALORES DE UN PROBLEMA DE OCTAVO GRADO.....	76
FIGURA 7. GRÁFICO DE UN PROBLEMA DE OCTAVO GRADO.....	77
FIGURA 8. TABLA DE VALORES DE UN PROBLEMA DE NOVENO GRADO .....	78
FIGURA 9. GRÁFICO DE UN PROBLEMA DE NOVENO GRADO .....	78
FIGURA 10. RESOLUCIÓN DE LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA .....	79
FIGURA 11. TABLA DE VALORES DE UN PROBLEMA DE DÉCIMO GRADO .....	80
FIGURA 12. GRÁFICO DE UN PROBLEMA DE DÉCIMO GRADO.....	81
FIGURA 13. PROPUESTA DE LA INVESTIGACIÓN .....	90
FIGURA 14. ELEMENTOS CURRICULARES DE LA PROPUESTA.....	92
FIGURA 15. FASES DE LA PROPUESTA .....	98



## Introducción

En las últimas décadas, las investigaciones sobre el estudio del signo (semiótica) han focalizado su interés en la asignatura de Matemáticas, porque la apropiación y uso de los registros semióticos (o formas de representación) de los objetos matemáticos son claves para la enseñanza-aprendizaje (Oviedo, Kanashiro, Bnzaque y Gorrochategui, 2012). En el Ecuador se ha realizado investigaciones en la universidad, pero no existen investigaciones que demuestran la relación e importancia de la semiótica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas en la Educación Básica. A pesar de que uno de los objetivos es el desarrollo de la capacidad de abstracción y comprensión de la formalidad de los sistemas semióticos del signo en la población estudiantil (Ernest, 2008; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2016a). Varias investigaciones (D'Amore y Radford, 2017; Duval, 2012; Iori, 2014; Sánchez y Escotto, 2018) señalan que, la población estudiantil presenta dificultades en los diferentes niveles educativos: primaria, secundaria y superior.

Las dificultades son relacionadas a la comprensión, conversión y utilización de los objetos matemáticos desde sus registros semióticos. A la mayoría de la población estudiantil le cuesta mucho esfuerzo y dedicación superar estas dificultades, porque es un problema que surge desde su educación anterior, donde el tiempo y el rol docente no cubrían las necesidades teóricas-prácticas de la población estudiantil. El personal docente deja a lado u olvida el estudio el signo, la cual limita a que la población estudiantil desarrolle la capacidad de abstracción, transformación, reconocimiento de los registros semióticos y factores que intervienen en la comunicación, actividad y aprendizaje de las Matemáticas (Distéfano, Aznar y Pochulu, 2016).

Asimismo, Iori (2014) señala un problema interesante, donde el docente pregunta ¿Qué es una recta?, y la población estudiantil responde a través de un dibujo, una frase, ecuación lineal ( $ax + bx + c = 0$ ). Pero, todos estos son registros semióticos que representan y contienen el concepto de recta, sus componentes, propiedades y su utilidad. Este es un conflicto cognitivo que es muy común en las aulas, por consiguiente, un estudio de semiótica



en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas es importante, indispensable y necesaria para el aprendizaje y la resolución de problemas académicos y sociales, sin importar las distintas formas de representación: lenguaje formal (expresión algebraica) o natural (gráfica, diagramas, palabras, entre otras).

De igual manera, la semiótica cubre las necesidades conceptuales y prácticas de la población estudiantil con respecto a la comprensión, comunicación y utilización de los diferentes registros semióticos del objeto matemático (Distéfano, et al., 2016; Oviedo, et al., 2012), porque a través de ella, la utilización y conversión de los registros semióticos no es tan compleja para la población estudiantil.

Esta complejidad proviene de los factores contextuales, metodológicos e individuales que inciden en el proceso educativo, la comprensión de los conceptos matemáticos y la comunicación con los demás (D'Amore y Radford, 2017). Los factores contextuales son: salón de clases, sistema educativo, cultura y contexto de la población estudiantil referida a la región, características, entre otras (Jornet, González y Sánchez, 2014). Los factores metodológicos abarcan los objetivos educativos, proceso de enseñanza, métodos y recursos disponibles en el aula o institución educativa (Rivera y Díaz, 2001). Y los factores individuales son las capacidades, habilidades, estilos y ritmos de aprendizaje que cada estudiante posee, vive y experimenta en su vida. Todos estos factores intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la cual tiene que recurrir a estudios, como la semiótica matemática para mejorar.

### **1.1 Planteamiento del problema**

Mi interés por la semiótica matemática surgió a partir de la lectura del libro “Semiótica en la didáctica de la Matemática” realizado por D'Amore, Fandiño e Iori en el 2013. Al tener una idea previa consulté otras fuentes de información de índole internacional y nacional. Pero, los estudios referidos a la semiótica en Matemática eran pocos comparado a la lingüística. En América Latina, varios investigadores (Distéfano, et al., 2019; González,

2011; Tocto, 2015) se interesaron en la semiótica dentro de la educación matemática, indagaron los beneficios y los problemas de la población estudiantil. De igual manera, en el Ecuador se encontró una guía de semiótica general realizada por Zechetto (2002) y una investigación de Díaz en el 2019 referida a la semiótica matemática en la Educación Superior. Pero, los estudios de semiótica matemática en la Educación Básica no se evidenciaban.

Tal situación me causó inquietud, porque en todos mis años escolares y en las prácticas pre-profesionales de la Universidad Nacional de Educación (UNAE) en distintas unidades educativas observé y experimenté que la población estudiantil tenía problemas en la asignatura de Matemáticas. Un ejemplo en el subnivel Superior fue en el tema de funciones, donde la docente solicitó a la población estudiantil transformar de un registro verbal, “f de equis es igual a seis equis más diez” a un registro algebraico  $f(x) = 6x + 10$ , y viceversa. Pero, la mayoría de la población estudiantil tuvo problemas con el análisis, interpretación y conversión del registro semiótico y obtuvo como resultado  $(fx = 6) + 10$ .

En este caso, la población estudiantil equivocándose en los diferentes registros semióticos de una función (verbal, tabular, algebraico y gráfico), cometió errores en la conversión del registro semiótico y no pudo relacionar el registro verbal con el registro algebraico, igual que en mis experiencias como estudiante de secundaria. Por lo tanto, este suceso afectó su rendimiento académico y desempeño en la clase. Además, la situación demostró una contradictoria con las Destrezas con Criterio de Desempeño “DCD” (M.4.1.45 hasta M.4.1.61) que el Currículo Nacional propuso para la población estudiantil del subnivel Superior en el tema de funciones (MINEDUC, 2016a). Estas DCD abarcaban el análisis, interpretación, comprensión y transformación de los diferentes registros (o formas de representación) de una función. Para que, la población estudiantil analice la articulación entre diferentes registros semióticos y resuelva problemas o modelos matemáticos desde funciones elementales.

Al no cumplir con las DCD, el perfil de salida del bachiller ecuatoriano, se afecta porque cada estudiante al egresar ha de usar y comprender las ideas o conceptos matemáticos para resolver problemas o modelos matemáticos contruidos con funciones elementales con o sin uso de las tecnológicas (MINEDUC, 2016a). La causa de esta situación fue la educación recibida en sus anteriores años de escolaridad, donde los contenidos matemáticos no eran practicados o analizados a profundidad, ya sea por la falta de tiempo o el incumplimiento del rol docente. También, el tiempo fue clave para la enseñanza-aprendizaje de funciones, porque esta influye en cubrir las necesidades conceptuales y prácticas del estudiante. Según el Acuerdo 242-11 del MINEDUC (2016b), el tiempo asignado para el subnivel Superior es de 6 horas pedagógicas semanales por grado.

El rol docente no se adecuó a las necesidades o dificultades de la población estudiantil. La docente al ser facilitadora de estrategias, recursos y herramientas no empleó el estudio de semiótica matemática en sus horas de clases como una estrategia de enseñanza que apoye al aprendizaje de funciones. La cual provocó que la población estudiantil no comprendiera el concepto de función, los registros semióticos de una función y la relación que mantiene entre ellos. Por estas razones, el presente proyecto de investigación propone una estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador. La propuesta es una alternativa de solución para resolver los problemas: comprensión, utilización y conversión de los diferentes registros semióticos (o formas de representación) junto al concepto de función.

## **1.2 Pregunta de investigación**

¿Cómo implementar una estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador?

### 1.3 Justificación

La enseñanza convencional requiere que la población estudiantil memorice fórmulas y realice procesos mecánicos, pero, esta no crea espacios para que cada estudiante construya sus conocimientos y emplee o desarrolle habilidades y capacidades. En cambio, en la actualidad, los requerimientos para la población ciudadana de la era digital son otras de las anteriores, producto del avance tecnológico y la globalización. Nuestros/as estudiantes confrontan otras exigencias para desenvolverse de manera eficaz y eficiente en una sociedad de cambio. Si bien es cierto la memorización es necesaria, pero no es suficiente. Por ello, la implementación de la semiótica en las actividades (situaciones-problemas, concepto, proposiciones o lenguajes) es indispensable, pertinente e importante dentro de las clases de Matemáticas, porque, esta ofrece un esquema conceptual que asocia ciertos significados a los registros semióticos del objeto matemático, utilidad, transformaciones, propiedades, procedimientos y experiencias a la población estudiantil (Azcárate y Camacho, 2003).

En la enseñanza y aprendizaje del tema de funciones, la semiótica con la exactitud de sus aspectos semióticos y representaciones permiten la utilización del objeto matemático. La semiótica relaciona, construye e interioriza los saberes nuevos con los anteriores para que cada estudiante aprenda (Ernest, 2008; Sánchez y Escotto, 2018; Tocto, 2015). La semiótica matemática ofrece a la población estudiantil ecuatoriana una comprensión del concepto y significado a través del análisis y conversión de los diferentes registros semióticos (o formas) de una función. Para que la población estudiantil logre conocer el origen de funciones, el porqué de su utilización en la vida cotidiana y el aprendizaje se perdure en la práctica. También, la semiótica contribuye al perfil de salida del bachillerato ecuatoriano, debido a que, cada estudiante egresado ha de usar y comprender los objetos matemáticos para resolver problemas modelados en funciones elementales con el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (MINEDUC, 2016a).

La implementación de la semiótica en el aula de clases mejora el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas en todos los niveles educativos como primaria,

secundaria y universitaria (Distéfano, et al., 2016; Ginsberg, 2015). Por otra parte, la búsqueda de la literatura de semiótica demuestra la existencia de más investigaciones en lingüística y pocos en Matemáticas. Especialmente en el Ecuador no existen estudios de semiótica dirigidos a la Educación Básica, sólo existe una guía general realizada en el 2002. En las prácticas pre-profesionales, desde hace más de cuatro años, observé que el personal docente, de las diferentes unidades educativas, desconoce u olvida la semiótica matemática, por ende, la población estudiantil presenta problemas en su aprendizaje.

De acuerdo con los argumentos anteriores, la presente investigación es innovadora y pertinente porque explora, describe e interpreta la relación entre la semiótica matemática y el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. También, la investigación es original, debido a que, en el país no existen estudios referidos a la semiótica matemática en Educación Básica y propone una estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador. Este es una contribución para que otros investigadores, docentes y estudiantes consulten los resultados de este trabajo de investigación.

## **1.4 Objetivos**

### **General**

Proponer una estrategia de enseñanza basada en semiótica que contribuya al aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de Educación General Básica del Ecuador.

### **Específicos**

- Fundamentar teóricamente la semiótica matemática en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones.
- Diagnosticar, desde una perspectiva práctica, la enseñanza-aprendizaje de funciones en relación con su semiótica.



- Diagnosticar la presentación de la semiótica matemática en el tema de funciones a través del análisis del Currículo Nacional, PCA, PCI, PUD y textos del Ministerio de Educación.
- Diseñar una propuesta con base en semiótica matemática para enseñar el tema de funciones.

### 1.5 Antecedentes

Este apartado presenta el origen del estudio de la semiótica y cómo esta contribuye a la educación matemática, especialmente en el tema de funciones. Las investigaciones referenciadas describen en qué consiste la semiótica, los beneficios al aplicarse en las clases y los principales problemas de la población estudiantil en este tema.

El estudio del signo o semiótica, según la Asociación Internacional de Estudios Semióticos (IASS) surge en los años sesenta desde los fundamentos epistemológicos y el pensamiento filosófico. Con el transcurrir del tiempo, la semiótica experimenta múltiples estructuraciones y reestructuraciones, lo que origina dos tradiciones semióticas etimológicas que prevalecen actualmente en el campo de la investigación. Estas dos tradiciones son: peirceana y saussureana.

La tradición peirceana es del pensador Charles S. Peirce (1839-1914). Según, Zechetto (2002) Pierce agrega el término “semiótico” desde el pragmatismo, lógico de abducción que involucra la dimensión teórica-cognitiva del ser humano. Esta se logra a través de la conexión: signo-objeto-interpretante, el signo (o representamen) es el vehículo donde el concepto transita. El signo puede adquirir tres maneras de representación: icono (imagen, diagrama o metáfora), índice (mental, artificial, natural) o símbolo (convención). El objeto es lo que el signo envía, y el interpretante es la idea del signo en la mente de un ser humano. El proceso triádico (signo-objeto-interpretante) le permite al ser humano valorar el objeto conforme a su presentación, percepción y experiencia anterior. Por último, en los años 1931 esta tradición se expande en los países anglosajones.

Por otro lado, la tradición saussureana surge de los estudios del lingüista Ferdinand de Saussure (1857-1913). De acuerdo con Zecchetto (2002), Saussure emplea el término “semiología” tras analizar la imagen acústica y la inserción del signo a la vida social del ser humano. Este lingüista establece el proceso triádico, individuo-signo-contexto, que determina al significante y significado como claves para el estudio del signo. El significante es la forma del signo: una palabra, fórmula, gráfica, símbolo, imagen visual, esquema, entre otras. Y el significado es la interpretación subjetiva del ser humano desde un contexto, situación, interés y capacidad. Esta tradición se expande por América Latina y Europa, en diferentes campos culturales, sin perder los principios de semiología.

A partir de estas dos tradiciones, varios investigadores (Duval, 1999; Eco, 2000; Tocto, 2015) combinan y estudian la semiótica para crear nuevas propuestas o recopilar información en la práctica educativa. Por ejemplo, Duval (1999) en su investigación analiza los factores: el significado, limitaciones y condiciones de utilización. Además, Duval agrega dos componentes (semiosis y noesis) al estudio del signo. La semiosis es “la aprehensión o la producción de una representación semiótica y la noesis son aquellos actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto” (1999, p.14), es decir, la semiosis y noesis son dos partes fundamentales para analizar los procesos, acciones y recursos que la persona utilice en el estudio de los objetos matemáticos en sus diferentes registros semióticos.

Por otro lado, Eco (2000) señala que la semiótica es un campo interdisciplinar, que toma en cuenta diversos fenómenos. Por ejemplo: la convención cultural, la evolución, la transformación de códigos y las reglas de la comunicación que influyen en la estructura interna y la utilización del signo como representación en la vida cotidiana. Eco considera el proceso triádico (individuo-signo-contexto) de la tradición saussureana como una parte elemental en el estudio de la semiótica.

Asimismo, el estudio de la semiótica se expande en las diferentes disciplinas, campos del saber, contextos, culturas y situaciones, para construir teorías, postulados o estudios nuevos. Un estudio es de González (2011) con el título “Tratamiento de las representaciones

semióticas de la función cuadrática”. La autora señala que las actividades cognitivas (razonamiento, resolución de problemas, conceptualización y comprensión) y estrategias heurísticas provocan el aprendizaje de función en su población estudiantil del noveno grado del Instituto Agropecuario Veracruz. Específicamente, las actividades cognitivas como es la conversión de un registro semiótico (formas) a otro registro contribuye a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática.

En la tesis de maestría de Tocto (2015) titulada “Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria”. El autor señala que el aprendizaje sucede cuando la población estudiantil logra transformar los distintos registros semióticos de una función cuadrática. En la transformación, la población estudiantil realiza dos actividades basándose en aspectos de ingeniería didáctica y conversión de registros semióticos de Duval. En estas actividades, según Tocto (2015) el registro textual (o verbal) es la más difícil de lograr, porque la población estudiantil presenta más dificultades en distinguir los elementos de una función cuadrática. Entonces, la transformación es una actividad donde la población estudiantil presenta dificultades en el reconocimiento de los componentes, propiedades, finalidades y conversión de cada registro semiótico, y según Duval (2004), la transformación es la actividad cognitiva menos trabajada en el aula de clases.

Contribuyendo a la idea anterior, Sánchez y Escotto (2018), señalan que la semiótica en el aula es una ciencia y un instrumento que contribuye al desarrollo de los fundamentos de lógica-matemática desde los distintos registros, lenguaje formal y natural. Los registros son: gráficas, números, fórmulas, expresiones algebraicas, dibujos, texto, imágenes, entre otras, que contribuye a la comprensión. Además, la semiótica matemática contribuye a la comprensión y utilización de los diferentes registros semióticos del objeto matemático considerando los factores (teorías, postulados, contexto, sociedad, la estructura interna del signo, las reglas de transformación, entre otras) que validan la confiabilidad de este (Ernest, 2008; Zecchetto, 2002).





Un ejemplo de investigaciones referidas a semiótica es el artículo de Distéfano, et al., en el 2019 con el título “Prácticas matemáticas y funciones semióticas en la significación de representaciones simbólicas de la Matemática Superior”. Los autores mencionan que la población estudiantil de las carreras de ingeniería, bioquímica, profesorado y licenciatura de Matemáticas de la Universidad Nacional de Mar de la Planta (Argentina) presentan problemas de interpretación y determinación de los alcances de algunos signos y símbolos matemáticos en sus primeros años de estudio en la universidad, porque el estudio de la semiótica matemática en los años de escolaridad fue nula y en la admisión a la universidad no se consideró como objeto de estudio. En otras palabras, el personal docente descuida, olvida e ignora la importancia de brindar una educación de semiótica matemática para que la población estudiantil logre comprender y utilizar el objeto matemático junto a sus diferentes representaciones (registros semióticos).

En definitiva, los antecedentes revisados sitúan a la semiótica matemática como una alternativa para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. En la enseñanza, la semiótica detecta los errores que cometen la población estudiantil en la comprensión, utilización y conversión de los diferentes registros semióticos de una función. En el aprendizaje, la semiótica ofrece al estudiante una apropiación y utilización de los objetos matemáticos junto a sus registros semióticos. Recordemos que en la revisión de antecedentes no se encontraron investigaciones de semiótica matemática realizadas en la Educación Básica del Ecuador.

### **1.6 Estructura del trabajo de titulación**

El trabajo de titulación se compone por varios apartados, que señalan la semiótica matemática en la enseñanza y aprendizaje del tema funciones. El primer apartado contiene la parte introductoria, que caracteriza el problema que surgió del diagnóstico. La justificación de la investigación: lo importante de realizar el estudio de semiótica matemática, los beneficios que proporciona a la enseñanza-aprendizaje de funciones y los



beneficiarios. Y se presentan los objetivos y los antecedentes (investigaciones sobre el tema de estudio). El segundo apartado contiene los fundamentos de la relación entre la semiótica matemática y el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. Los fundamentos son teorías e investigaciones de diferentes autores en el mundo de la investigación referidas a la educación, semiótica matemática, función, registros semióticos, enseñanza-aprendizaje de funciones y estrategia de enseñanza.

El tercer apartado describe los aspectos metodológicos de la investigación, tales como: enfoque cualitativo, método inductivo y método de análisis. También, detalla las técnicas aplicadas (observación participante, encuesta y análisis de contenido). El cuarto apartado detalla el análisis y resultados obtenidos de la triangulación de las técnicas. El quinto apartado detalla la propuesta de investigación, explica el objetivo y en qué consiste. Finalmente, se incluyen las conclusiones obtenidas de la investigación que responden a la pregunta formulada junto a las limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación.

## 2. Marco teórico conceptual

El presente apartado aborda los principios de la educación matemática, semiótica, semiosis y noesis, la función matemática, registros semióticos de una función, conversión de registros semióticos, enseñanza-aprendizaje de funciones, entre otros aspectos relevantes al tópico (Ver figura 1).

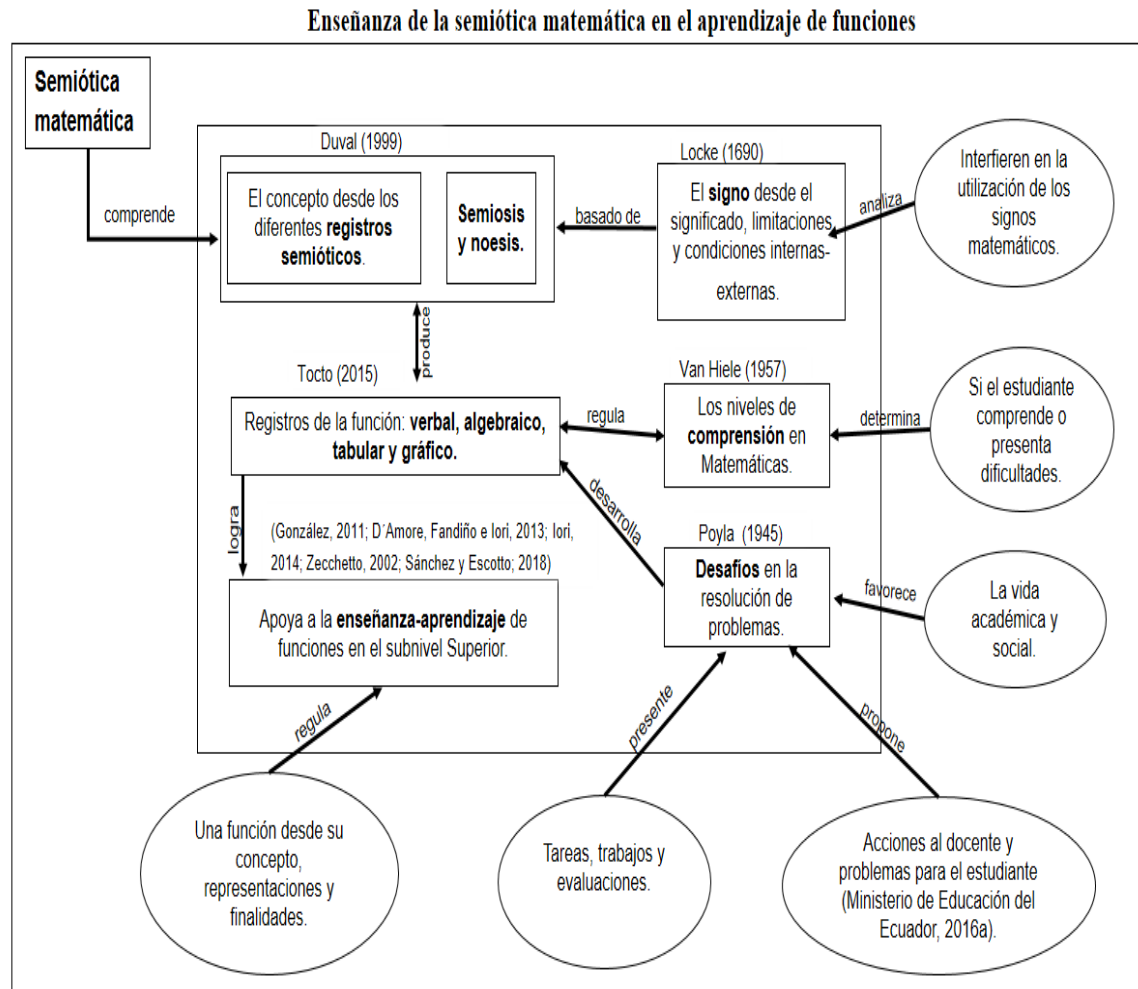


Figura 1. Enseñanza de la semiótica matemática en el aprendizaje de funciones

Fuente: elaboración propia, 2020.

### 2.1 Educación matemática y Semiótica

La educación matemática es una disciplina con principios y metas establecidas que contribuye a la formación integral de cada estudiante y el cumplimiento de las exigencias de la sociedad. Los seis principios curriculares establecidos por la National Council of Teacher



of Mathematics (NCTM) en el año 2000, guían a los miembros educativos, especialmente al docente le indica las acciones que debe seguir para mejorar su rol en todos los niveles educativos. Los seis principios de la NCTM son: equidad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología (Fernández, 2005). Estas deben estar en la planificación, gestión y evaluación de cualquier tema de Matemáticas. A continuación, estos principios son explicados uno por uno para conocer cómo contribuye al proceso educativo y cómo se puede mejorar la educación matemática en el Ecuador.

- **Equidad** es una cualidad de la educación por ser un derecho universal. En la República del Ecuador “la educación es un derecho de las personas a lo largo de su vida y un deber ineludible e inexcusable del Estado” (Constitución, 2008, art.26). El MINEDUC es el organismo que garantiza el acceso a la educación a toda la población ciudadana. Además, este organismo orienta el proceso de ingreso del estudiante y selecciona el personal docente que va a trabajar en las distintas unidades educativas públicas del Ecuador.
- **Currículo** es un documento oficial de los organismos de educación. En Ecuador, los integrantes del MINEDUC crean o modifican el currículo. Las últimas tres modificaciones son en 1996, 2010 y 2016. Este último surgió al observar que los contenidos tenían problemas de estructuración, por ello, las destrezas generales se cambian a Destrezas con Criterio de Desempeño (Punina y Burbano, 2017). Actualmente, el Currículo Nacional es interdisciplinario, transversal, sólido y flexible a las culturas y peculiaridades de las instituciones educativas. Y está dividido en dos: la Educación General Básica (EGB) y Bachillerato General Unificado. En la EGB las asignaturas son: Matemáticas, Lengua y Literatura, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Educación Cultural y Artística, y Educación Física (MINEDUC, 2016a). En la asignatura de Matemáticas, los conocimientos básicos obligatorios son secuenciales, es decir, estos están articulados en los



distintos subniveles de la educación obligatoria (preparatoria, básica elemental, básica media, básica superior y bachillerato).

- **Enseñanza** es un proceso que el personal docente u otro realiza para propiciar a cada estudiante un desarrollo de valores, habilidades, capacidades y destrezas, y construcción del conocimiento matemático. Para ello, emplea estrategias, métodos, técnicas y recursos, porque, quien enseña es el encargado de seleccionar los temas, adecuar los tiempos, tener altas expectativas y dar un fuerte apoyo a la población estudiantil. En las instituciones educativas del Ecuador, el personal docente es guía del proceso de enseñanza-aprendizaje y su desempeño es evaluado cada dos años por un sistema de evaluación (MINEDUC, 2011, art. 11).
- **Aprendizaje** es el producto del proceso de enseñanza, donde la observación, análisis y experimentación son piezas claves para que la población estudiantil se desarrolle, se adapte y se desenvuelva en la sociedad de la mejor manera posible. Según Duval (2004) el aprendizaje de matemáticas requiere actividades cognitivas que permitan la conceptualización, razonamiento, resolución de problemas y comprensión del lenguaje natural y formal. El aprendizaje de cada estudiante se evalúa de tres maneras: formativa, diagnóstica y sumativa con cuestionarios, resolución de problemas, registro de desempeño, pruebas estandarizadas, actividades, entre otras.
- **Evaluación** es una parte fundamental del proceso educativo, porque esta apoya con información útil que permite mejorar y corregir los errores de los miembros educativos y del sistema. La información proviene de pruebas, test, actividades o fuentes de datos confiables, tales como: las evaluaciones de Trends in International Mathematics and Science Study “TIMSS”, evaluación de Programme for International Student Assessment “PISA”, “Evaluación de desempeño docente “Ser Maestro”, entre otras. El Instituto Nacional de Evaluación Educativa “Ineval” es un organismo autónomo que realiza las



evaluaciones internas y externas del Sistema Educativo ecuatoriano para mejorar la calidad educativa (Gil, Morales y Meza, 2017).

- **Tecnología** es esencial por la influencia que posee en la forma de enseñar-aprender matemática y en el desarrollo de habilidades y capacidades. Además, esta favorece la comunicación con y entre los estudiantes. En el Currículo Nacional, el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) es un componente indispensable para abordar los temas de Matemáticas en los distintos niveles de educación (MINEDUC, 2016a).

De acuerdo con lo anterior, el Sistema Educativo ecuatoriano se adapta y cumple con cada uno de los principios de la NCTM. No obstante, cada unidad educativa con el Proyecto Educativo Institucional (PEI) y el Proyecto Curricular Institucional (PCI) modifican y trabajan de acuerdo con la situación, cultura, contexto, necesidades e intereses de sus estudiantes. Cada unidad educativa presenta particularidades, pero todas tienen una meta común: ofrecer un proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas que responda a las exigencias de la sociedad y las necesidades e intereses del estudiante. Para ello, el personal docente se capacita y se guía del Currículo Nacional, porque, esta contiene DCD e indicadores de logro para evaluar el desempeño del estudiante en cada uno de los temas (MINEDUC, 2016a).

En cada tema de Matemáticas, el personal docente tiene que conocer el “qué” y “cómo” enseñar. El “qué” enseñar hace referencia al conocimiento matemático. La familiaridad con esta ciencia y sus bases, tal como: los objetos matemáticos, los significados y los diferentes registros de representación. Para ello, la semiótica matemática ofrece al personal docente un estudio especializado de los objetos matemáticos junto a sus diferentes registros semióticos y significado, porque, un objeto matemático no puede existir si no hay registro semiótico y si no hay registro semiótico no hay comprensión (Duval, 2004; Sánchez y Escotto, 2018; Zecchetto, 2002).



Con respecto al “cómo enseñar” se refiere a las acciones o decisiones que el personal docente realiza para que la población estudiantil construya conocimiento y desarrolle habilidades, destrezas y capacidades. Por ejemplo, una de las acciones es incluir el estudio de la semiótica matemática a las clases, porque esta es una manera de enseñar a conocer y utilizar los objetos matemáticos en diversas situaciones o formas. También, esta ayuda al docente a identificar que estudiante comprende o si presenta problemas en las actividades planteadas. Cabe recalcar que los conocimientos matemáticos no son objetos reales, por ello, se usan los diferentes registros semióticos (gráficas, algebraicas, figuras, entre otras) que ayudan a la comprensión, comunicación y el desarrollo de la actividad matemática (Oviedo et al., 2012). Las actividades pueden ser resolución de situaciones-problemas, concepto, proposición y conversión de los diferentes registros semióticos en diferentes lenguajes (formal y natural).

En el proceso de enseñanza de Matemáticas se utilizan y se convierten los registros semióticos de acuerdo con la cultura, el contexto, la sociedad, entre otras (Sánchez y Escotto, 2018; Zecchetto, 2002). Y las reglas semióticas, psicología cognitiva, fronteras epistemológicas y los componentes de aprendizaje solventan los efectos de los factores que pueden presentarse en este proceso (D'Amore y Radford, 2017; Gonzales, 2011; Zecchetto, 2002).

Las tres reglas semióticas son: sintáctica, semántica y pragmática. La sintáctica demuestra la relación formal que tiene el signo, es decir, esta analiza las relaciones y correlaciones que contiene un signo con otros. La semántica estudia la interpretación del sujeto en el significado de un signo, y la pragmática examina las reglas sociales o convenios que la población estudiantil tiene que cumplir para lograr la comprensión, porque el significado de un signo está condicionado por el contexto, cultura y sociedad (Ernest, 2008; Zecchetto, 2002). Asimismo, todas estas contribuyen a que la población estudiantil construya conocimientos matemáticos con ayuda de sus habilidades, capacidades y

destrezas, por ello, la semiosis y noesis juegan un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

## **2.2 Semiosis y noesis**

La semiosis es la producción de varios registros semióticos de representación, que junto a la conversión y la creación de registros favorecen al aprendizaje (Duval, 2004). Y, la noesis son los procesos mentales que se emplean para aprender (Duval, 1999). Los procesos mentales son la atención, percepción, memoria, lenguaje, pensamiento y aprendizaje (Barallobres, 2016). Pero, estos procesos mentales están influenciados por la cultura, donde cada estudiante forma parte de una dimensión cultural y social. Y las fronteras epistemológicas influyen en la regulación, acceso y funcionamiento del signo matemático dentro de una sociedad (D'Amore y Radford, 2017). Finalmente, los factores de aprendizaje como inteligencia, conocimientos previos, experiencias y motivación son claves para que se consolide el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas.

En definitiva, existen varios factores que influyen en el aprendizaje de la población estudiantil. Por ello, el personal docente tiene que aplicar el estudio de la semiótica matemática en el proceso de enseñanza, porque los beneficios son una preparación y familiarización con cada uno de los objetos, registros y signos matemáticos. También, la semiótica contribuye a que la población estudiantil utilice, transforme y comprenda cada signo en las diversas formas, situaciones, contextos y sociedad.

## **2.3 La función**

La función es un signo matemático que se utiliza para representar la relación entre dos objetos o conjuntos que modelan situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, la demanda de producción de alimentos, costo de un producto, dinero-trabajo, entre otras. El estudio de las funciones inició en Babilonia y Grecia hace 2000 a.c -600 a.c, pero el concepto que hoy se conoce, Bourbaki lo construye en 1939. Bourbaki conceptualiza a la función con





una regla general, relación entre el dominio y el rango, ambos conjuntos arbitrarios (Díaz, 2013). Por ello, cada función tiene dos conjuntos: conjunto partida y conjunto de llegada.

Al conjunto de partida se llama dominio, que surge de la variable independiente. Este conjunto contiene valores que se colocan en el eje horizontal, eje de las abscisas o eje “x” de un plano cartesiano. Y al conjunto de llegada se le denomina rango, recorrido o imagen de la función. En un plano cartesiano, los valores de este conjunto se ubican en el eje vertical, eje de las ordenadas o eje “y”. También, Acosta y Acosta (2015) señalan que cada función tiene que cumplir con dos condiciones: la existencia y la unicidad. La condición de existencia se refiere a que todo el conjunto de partida o dominio tiene que mantener una relación con algún elemento del conjunto de llegada. Mientras, la condición de unicidad es la correspondencia de un solo elemento de la variable independiente a la variable dependiente, es decir, el dominio no debe tener dos o más imágenes (o rango).

Existen diferentes tipos de función que se clasifican de acuerdo:

- A la ecuación algebraica que lo modela: cúbica, cuadrática, de primer grado (lineal, afín, identidad) y constante
- Criterio de la primera derivada: creciente y decreciente
- A su continuidad en su punto: continua y discontinua
- Simetría: pares e impares
- A su rango: acotadas y no acotadas
- Periodicidad: periódicas y no periódicas.

Al parecer existe una variedad de funciones que se abordan en diferentes niveles educativos (primaria, secundaria y universidad), pero cada función se representa de cuatro maneras (o registros semióticos): gráfico, verbal, tabular y expresión algebraica (Tocto, 2015). Por ello, el Currículo Nacional señala al tema de funciones un aprendizaje básico imprescindible que debe ser desarrollado en el subnivel Superior para evitar situaciones de exclusión y daño al proyecto de vida personal y social (MINEDUC, 2016a), es decir, aprender

correctamente las funciones matemáticas a cada estudiante le ayuda a comprender y describir sucesos cotidianos, sociales, económicos, científicos, entre otros.

## 2.4 Registros semióticos de una función

Una función tiene cuatro tipos de registros semióticos: gráfica, algebraica, verbal y tabular (Tocto, 2015). El registro gráfico son imágenes o gráficas visibles; el registro algebraico es la combinación de símbolos, números y letras; el registro verbal es una combinación de palabras, letras del alfabeto y números, y el registro tabular es una tabla de valores. La tabla contiene los valores de la relación entre la variable independiente “x” y la variable dependiente “f(x)” o “y”. Todos estos registros se pueden convertir o transformar de un registro a otro (Ver figura 2). La cual puede ser de distintas maneras: verbal-algebraica, gráfica-tabla de valores, tabla de valores-algebraica, algebraica-gráfica, gráfica-verbal, tabla de valores-verbal, y viceversa.

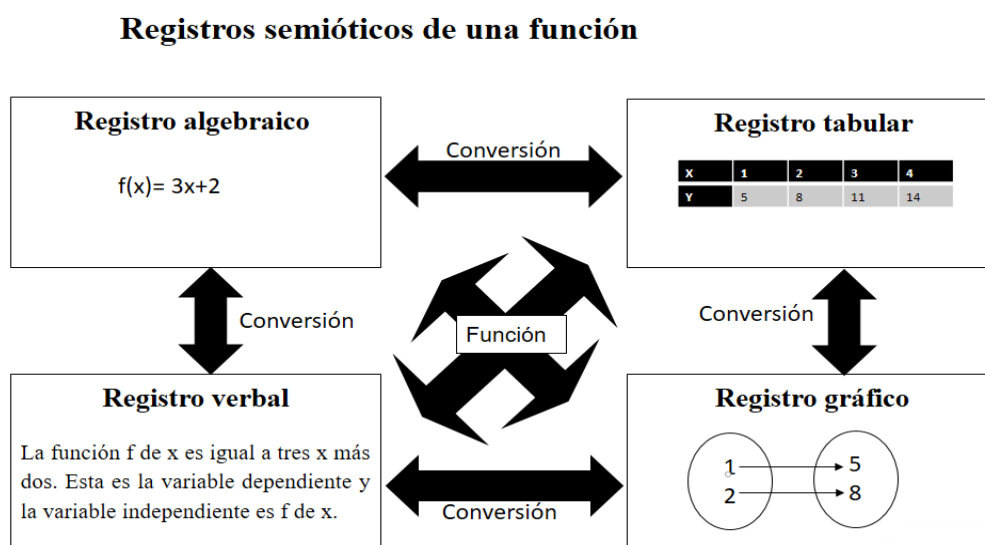


Figura 2. Conversión de los registros de una función

Fuente: elaboración propia, 2020.

La transformación es una propiedad que consiste en cambiar de un registro a otro, sin perder el significado. Según Duval (2004) es la semiosis que ayuda a explorar y observar una función desde los diferentes registros, donde cada transformación contribuye al

aprendizaje (Iori, 2014; Panizza, 2018). Para la transformación de registros semióticos, la población estudiantil tiene que tomar en cuenta la situación didáctica de su actividad matemática y seguir los siguientes pasos que Iori (2014) describe para una correcta transformación:

1. Elegir el registro de representación.
2. La transformación tiene que estar sujeta a tratamientos y pasos.

La elección de los registros de representación depende de los requerimientos sociales, culturales, académicos o personales. En cambio, los tratamientos de cada registro están sujetos a los componentes internos (Iori, 2014). Para ello, se necesita trabajar con las reglas del signo: semántica, sintáctica y pragmática, porque estas explican el concepto, componentes, propiedades, finalidades y registros semióticos de una función. Además, en el proceso de transformación se desarrollan habilidades y capacidades. Las habilidades: razonamiento; utilización del concepto de función; construcción de tratamientos heurísticos de conversión de registros de función, y análisis y solución de situaciones matemáticas o la vida cotidiana. Las capacidades: observación, análisis, transformación, interpretación, deducción y explicación de una función en sus distintas formas. A continuación, las tres reglas semióticas analizan los cuatro registros semióticos de una función.

- **Registro verbal:** Pedro vende un kilo de papa a 3 dólares. La dimensión semántica determina las partes de la función: “1 kilo de papa” es la variable independiente o dominio y “3 dólares” es la variable dependiente, rango, recorrido o imagen de una función. El conjunto de partida abarca los valores de la variable independiente “1 kilo de papa” y el conjunto de llegada tiene los valores de la variable dependiente “3 dólares”. De igual manera, la semántica analiza si el enunciado mantiene el mismo significado en los distintos contextos, debido a que, la palabra “papa” también significa el obispo de Roma. En otros países como México o España, la papa se llama patata.

Y la dimensión pragmática verifica si el enunciado anterior es comprensible y adaptado a la realidad del sujeto. El lector o estudiante conoce el idioma del enunciado, el español. El español tiene complejas leyes gramaticales, por ello, la dimensión sintáctica analiza: redacción, gramática, lógica de tiempo (presente) y desarrollo secuencial del enunciado. En otras palabras, si los signos de puntuación, adjetivos, sujetos, acciones y conectores favorecen la comprensión del enunciado. Luego de analizar los componentes, propiedades y finalidades de esta función en registro verbal se requiere convertir a un registro gráfico. Para ello, los valores de kilo de papa son colocados en el eje “x” y los valores de dinero son colocados en el eje “y” de un plano cartesiano.

- **Registro gráfico en un plano cartesiano:** Pedro vende un kilo de papa a 3 dólares, es una función lineal.

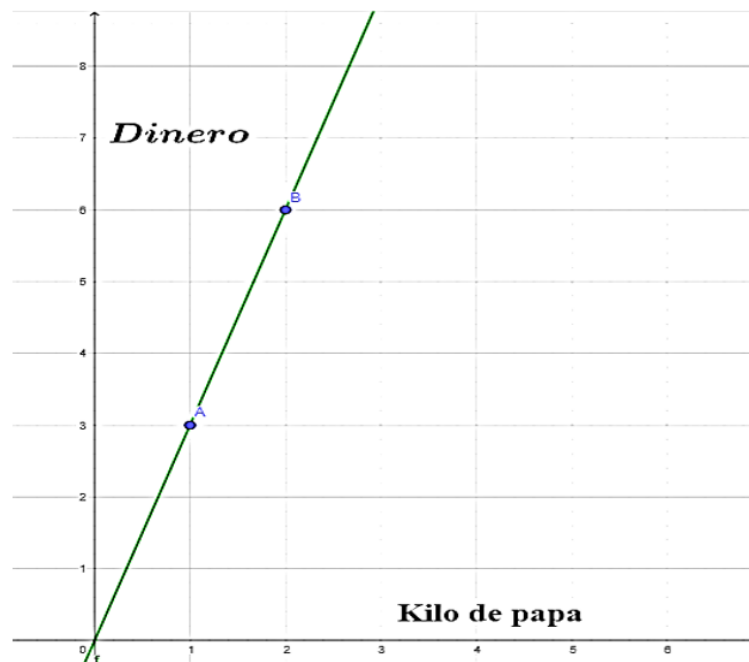


Figura 3. Registro gráfico en un plano cartesiano

Fuente: elaboración propia, 2020.

En esta función, la dimensión semántica determina que “kilo de papa” es el conjunto de salida de la variable independiente “x” y “dinero” es el conjunto de llegada de la



variable dependiente “y”. En la gráfica hay una recta color verde que pasa por el punto de origen o, entonces, la gráfica demuestra que es una función lineal ( $y = mx$ ). La “y” es la variable dependiente, recorrido o la imagen de la función, “x” es la variable independiente o dominio, “=” es la relación de las dos variables y “m” es la pendiente. La pendiente es la inclinación de la recta (color verde) con respecto al eje “x” o abscisas. Una pendiente puede ser decreciente, creciente o constante. La pendiente es decreciente cuando cumple con la condición “ $m < 0$ ” y el ángulo que forma la recta con la parte positiva de OX es obtuso, la pendiente es constante cuando cumple con la condición “ $m = 0$ ”, y no forma ningún ángulo. Y la pendiente es creciente cuando  $m > 0$  y el ángulo que forma la recta con la parte positiva de OX es agudo. En este caso la pendiente es creciente, porque, la inclinación de la recta forma un ángulo agudo.

La sintáctica determina que existe una relación entre los valores de “x” y “y”, porque, existen pares de puntos (x, y) de color azul en el gráfico. Los valores del conjunto independiente (en el eje x) son 1 y 2, y los valores del conjunto dependiente (en el eje y) son 3 y 6, es decir, los pares de puntos son 1:3 y 2:6. Por otra parte, la pragmática, determina que el gráfico responde a las exigencias de un texto, docente u otro, porque, la gráfica cumple con la relación entre kilo de papa y dinero. Luego de analizar la gráfica, el estudiante tiene que convertir el registro gráfico a un registro tabular. Para ello, ha de tomar uno o varios pares de puntos (x, y) de la gráfica y colocarlos en una tabla de valores.

- **Registro tabular:** la función en el registro gráfico anterior demuestra que los valores independientes son 1 y 2, y los valores dependientes de estas son 3 y 6, respectivamente.

### Forma vertical

X	f(x) o Y
1	3
2	6

### Forma horizontal

X	1	2
f(x) o Y	3	6

Figura 4. Registros tabulares de una función

Fuente: elaboración propia, 2020.

Desde la dimensión pragmática, la tabla de valores está en dos formas de representación, vertical y horizontal. La representación vertical formada por dos columnas (los valores de la variable independiente “x” está en la primera columna, al lado izquierdo y los valores de la variable dependiente “f(x)” está en la segunda columna, al lado derecho) y una o varias filas (en la primera fila se encuentra el primer valor asignado “1” con su recorrido “3”, y en la segunda fila está el valor “2” junto a su recorrido “6”). Estos resultados (3,6) son los valores de la variable dependiente “f(x)”, colocados en la segunda fila de la tabla.

De igual manera, la dimensión sintáctica analiza la relación entre la variable independiente “x” y la variable dependiente “f(x)”. Tal es el caso, de la relación entre el valor independiente “1” y el valor dependiente “3” o el valor independiente “2” existe una relación con el valor dependiente “6”. Finalmente, la tabla de valores de esta función está sujeta a las propiedades: por cada valor de la variable independiente “x” le corresponde un valor de la variable dependiente “y”, y la constante de proporcionalidad es “3”.

La función es creciente, porque, si los valores de la variable independiente “x” aumentan, los valores de la variable dependiente “y” también incrementa. Su intervalo cumple la característica  $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Por ejemplo, el valor de la variable independiente es “1” y el valor de la variable dependiente es “3” ( $3 \times 1 = 3$ ). Y si el valor de la independiente es “2”, el valor de variable dependiente es de “6” ( $2 \times 3 = 6$ ), debido a que, la función tiene una constante de proporcionalidad de valor “3”. Pero,



existen otros casos (Ver figura 6), donde el valor “x” aumenta, pero, el valor de “f(x)” disminuye, función decreciente.

Tabla de valores

x	1	2	3
f(x)	-1	-2	-3

Figura 5. Tabla de valores de una función

Fuente: elaboración propia, 2020.

La función “ $f(x) = -x$ ” es decreciente, debido a que, su intervalo cumple con la característica  $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ . Por ejemplo, si el valor independiente vale “1”, el valor dependiente es -1 ( $-1 = -1$ ). Una función es decreciente cuando cumple con la siguiente condición  $f'(x) \leq 0$ , es decir, todo punto de dominio tiene la derivada negativa. Asimismo, la semántica determina que el conjunto de valores de “x” es el dominio o anti imagen de la función y el conjunto de valores de “y” o “f(x)” es el recorrido, rango o imagen de la función. Cabe recordar que la tabla de valores en forma horizontal tiene dos filas, en la primera fila están los valores de la variable independiente (x) y los valores de la segunda fila surgen de la variable dependiente (Ver figura 4, parte derecha).

Finalmente, el estudiante para convertir de un registro tabular a un registro algebraico tiene que definir los valores de “x” y “y”, porque al conocer y encontrar la relación que existe entre estos dos conjuntos construye el registro algebraico  $f(x) = 3x$  ó  $y = 3x$ .

- **Registro algebraico:** en la función:  $f(x) = 3x$ , la dimensión sintáctica analiza la relación entre cada letra, número y símbolo empleado en esta función. La letra “x” representa el valor independiente, “f(x)” representa el valor dependiente, 3 es el valor de proporcionalidad y el “=” es un signo de relación para combinar dos términos bien formados (“x” y “f(x)”). La pragmática determina las reglas sociales y exigencias de la función  $f(x) = 3x$ . Las representaciones de las variables de la función son de distintas



maneras, la variable dependiente puede representarse en “y”, “f(x)”, “g(x)”, “h(x)”, entre otras. Y la representación de la variable independiente es la letra “x” u otra letra del alfabeto. Las representaciones dependen de los requerimientos para que el símbolo de igualdad “=” cumpla su función.

La semántica interpreta y da un significado a cada uno de los símbolos, números y letras de la expresión algebraica de la función  $f(x) = 3x$ . Desde el álgebra, los términos “f(x)”, “x”, “3” y “=” son justificados. El término “f(x)” es la variable dependiente, “x” es la variable independiente, “3” es la constante de proporcionalidad o pendiente de la recta (inclinación), y “=” es la relación entre las dos variables, independiente y dependiente.

Finalmente, la pendiente (m) es la inclinación de la recta con respecto al eje “x” o abscisa, esta puede ser creciente, decreciente o constante. La pendiente es creciente cuando “ $m > 0$ ” y el ángulo que forma la recta con la parte positiva de OX es agudo. Es decreciente cuando “ $m < 0$ ” y el ángulo que forma la recta con la parte positiva de OX es obtuso. Es constante cuando “ $m = 0$ ”, no forma ningún ángulo. En este caso, la pendiente es creciente, porque, la inclinación tiene un valor de 3 ( $m > 0$ ). Por otra parte, en términos de importancia, el símbolo dominante en esta expresión algebraica es la relación de igualdad binaria “=”. El uso de este símbolo demuestra que existe una relación entre la variable independiente y la variable dependiente. La expresión  $f(x) = 3x$ , se lee “f de equis es igual a tres equis”.

De acuerdo con todo lo anterior, las reglas del signo analizan los elementos, propiedades, finalidades de una función y favorecen para transformar un registro semiótico de una función a otra. En el análisis se evidencia que los cuatro registros semióticos de la función son complementarios, es decir, cada registro depende del otro, y estas a la vez contribuyen al aprendizaje de funciones. En el proceso de aprendizaje se necesita que se transforme el registro de representación, es decir que exista un registro de partida y un



registro de llegada, tal y como en el ejemplo anterior que inició con un registro verbal y terminó con el registro algebraico, pasando por cada registro (gráfico y tabular).

En definitiva, la semiótica matemática ayuda a la población estudiantil a conocer el origen de las cosas y el por qué, a comprender los componentes, propiedades, tipos y las finalidades de una función. Lo que demuestra que cada transformación de registro semiótico es necesario, diferente y complementario al anterior. También, la conversión de los registros semióticos con la implementación de la semiótica ayuda a disminuir los principales problemas (tratamiento y conversión) del aprendizaje de Matemáticas en los diferentes niveles educativos (Duval, 2004). Por tal razón, es necesario e indispensable que la semiótica matemática sea implementada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones.

## **2.5 Enseñanza-aprendizaje de funciones**

En la era digital, la enseñanza-aprendizaje de funciones tiene que ser contextualizada y adaptada a la realidad de la población estudiantil. Por ello, el NCTM requiere que el personal docente se comprometa a implementar estrategias y recursos TIC en sus clases. Contribuyendo a esta idea, Echavarría (2013) recalca la importancia de implementar las TIC como recursos de enseñanza que facilitan la comunicación y el aprendizaje de la población estudiantil. La integración de las TIC al proceso de enseñanza es un apoyo y un elemento importante para las clases de funciones, porque, esta permite a la población estudiantil construir conocimiento y desarrollar habilidades, destrezas y capacidades, tales como el razonamiento espacial, pensamiento lógico, resolución de problemas, entre otros. Por tal razón, el personal docente puede implementar uno varios recursos tecnológicos (GeoGebra o Graph) para favorecer el rendimiento académico, motivación e interés de la población estudiantil en el tema de funciones.

Los recursos tecnológicos junto a la semiótica se acoplan al modelo cognitivo-constructivista, porque le permite a la población estudiantil ser el protagonista de su aprendizaje a través de actividades como resolución de problemas-situaciones,

proposiciones, entre otras. Además, el personal docente tiene que asegurarse que la población estudiantil posea conocimientos previos sobre el recurso y sobre temas elementales, tales como: conjuntos, relaciones, sistema de coordenadas cartesianas y ubicación de los diferentes números en el plano cartesiano, lenguaje algebraico, factorización, entre otros.

Los requerimientos anteriores son bases para que el estudio de funciones responda el qué y por qué aprender este tema. El “qué” se refiere al tema de funciones y el “por qué” se refiere a los beneficios al aprender funciones. Uno de los beneficios es vivir y comprender los sucesos de la vida cotidiana o la realidad. Por ello, el MINEDUC (2016a) en el currículo nacional establece las DCD, desde la M.4.1.44 hasta la M.4.1.61., que deben ser desarrolladas en el abordaje del tema de funciones con y sin uso de la Tecnología.

Para lograr las DCD, la semiótica matemática y las TIC contribuyen a que la población estudiantil adquiera un significado, comprensión, utilización y conversión de los diferentes registros semióticos (Gonzales, 2011; Tocto, 2015). También, el MINEDUC en su Currículo Nacional (2016a) establece que el criterio de evaluación CE.M.4.3 se cumpla. Este criterio trata de “Define funciones elementales..., reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales” (p. 892) y que puede ser valorado con actividades o problemas que requieran la conversión de los diferentes registros semióticos de una función. En este caso, la población estudiantil comprende cognitivamente a través de la elección del registro de representación, destaca las propiedades, componentes y finalidades de una función en la vida real y el aprendizaje se perdura en el tiempo, memoria y en la práctica.

De igual manera, en el proceso de aprendizaje de funciones, la población estudiantil se adapta a prácticas sociales para adquirir valores, habilidades, capacidades, destrezas y conocimientos conceptuales, algorítmicos, estratégicos y comunicativos (D'Amore, et al., 2013). Esto se logra a través de la práctica y participación en diálogos, exposiciones,



discusiones que el docente y la población estudiantil mantienen durante la clase. En la clase, el docente puede preguntar a su población estudiantil: ¿conocen algún problema relacionado?, ¿Qué es lo conocido?, ¿Cuáles son los datos disponibles?, ¿Que se quiere lograr?, ¿Cuál es la condición o condiciones para transformar de una representación a otra?, ¿Empleó todos los datos?, ¿Está correctamente resuelto el problema de función?, ¿Cuáles son los argumentos que sostiene esa afirmación?, ¿Existen otras maneras de resolver problemas a través de la conversión?, entre otras.

Las preguntas como las anteriores, según Polya (1945) desafían a la población estudiantil en la resolución de problemas cotidianos o situaciones de la vida diaria del presente y del futuro. Por ello en la resolución de problemas, el personal docente tiene que actuar como guía e impulsor del conocimiento y lograr que la población estudiantil reflexione sobre las decisiones o acciones que realiza en su proceso de aprendizaje.

En definitiva, el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones demanda implementar la semiótica matemática y los recursos tecnológicos que responda a las necesidades de la población estudiantil, tales como la identificación de los factores que intervienen en la utilización y comprensión del signo, y conversión de los distintos registros semióticos. Enfatizando que los registros semióticos de una función son representaciones que sirven para comunicarse con los demás, comprender y explicar el funcionamiento de varios sucesos de la vida cotidiana, de la naturaleza y el mundo.

## 2.6 Niveles de comprensión de Van Hiele

El docente al ser guía, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones, tiene que reconocer el nivel de comprensión de cada estudiante para retroalimentar o enseñar nuevamente si es necesario. La comprensión, según Van Hiele (1999) está repartida en 6 niveles progresivos y jerarquizados: visualización, análisis, clasificación, deducción y rigor.

- El primer nivel es la **visualización**. Aquí, el estudiante reconoce el registro semiótico de una función como un todo, no diferencia las propiedades ni los



componentes (dominio y recorrido). Identifican formas, pero no las descomponen ni convierten en otra forma.

- El segundo nivel corresponde al **análisis** del registro de una función. El análisis es a través de las reglas semióticas con un razonamiento lógico que permiten identificar todos los componentes, propiedades y finalidades de una función. Pero, si el estudiante no entiende aún la relación que existe entre propiedad y concepto, no reconoce los elementos, y no distingue entre un concepto y un registro semiótico, sus argumentaciones carecen de credibilidad o confianza.
- El tercer nivel es el de **ordenación o clasificación**. Aquí, el estudiante establece interrelaciones entre las propiedades y componentes de una función. Realiza deducciones y distingue un registro de otro. Sin embargo, las conversiones y los tratamientos a diferentes registros de una función aún no son realizadas.
- En el cuarto nivel consiste en la **abstracción** que pretende descubrir o demostrar las propiedades de una función desde el análisis anterior. El estudiante en este nivel logra una visión general de la función y el desarrollo de un razonamiento lógico, que facilita la conversión de un registro de función a otro.
- El quinto nivel es la **deducción formal**, donde el estudiante establece interrelaciones entre un registro a otro. El estudiante representa el concepto matemático desde las diferentes formas.
- El sexto nivel es el **rigor**. En este nivel, el estudiante reconoce, integra y explica una función de acuerdo con las características y propiedades, desarrolla su habilidad de razonamiento abstracto y trabaja con los diferentes registros semióticos de una función sin ningún problema.

De acuerdo con lo anterior, la población estudiantil tiene que transitar por cada nivel para comprender y aprender funciones, porque, los niveles permiten indagar a detalle “lo que se quiere decir con ellos, cómo y cuándo se deben utilizar para la eficaz comprensión de lo que se quiera decir” (Beiza, 2015, p.8). También, las orientaciones del Currículo Nacional y



las actividades que el personal docente propone tienen que ser orientados a la comprensión y al aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica. Y estos a la vez deben facilitar el desarrollo de las capacidades: razonamiento, representación, comunicación, argumentación, entre otras.

### **3. Marco metodológico**

Antes de explicar en qué consistió la metodología de la presente investigación conviene aclarar que las pruebas necesarias para recopilar la información necesaria en las clases no se pudieron realizar, porque la pandemia de enfermedad por coronavirus de 2019-2020 obligó a que las clases presenciales se suspendieran pasando a una modalidad virtual, cuyo tiempo era limitado. Por tal razón, el enfoque de la investigación fue el cualitativo, que mayormente fue un análisis de documentos (Currículo Nacional, PCI, PCA, PUD y textos del Ministerio de Educación). Los métodos, inductivo y analítico, orientaron el estudio. Las técnicas utilizadas fueron la observación participante, encuesta y análisis de contenido, que conjuntamente a los instrumentos guía de observación, Google Forms, matriz de revisión y rúbrica ayudaron a la recopilación de información de semiótica matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones en el subnivel Superior.

Toda la información recopilada con las técnicas e instrumentos de recolección de datos sirvió para la triangulación de la información, el cumplimiento de los objetivos específicos (2 y 3) y a la construcción de la propuesta de la investigación. La propuesta de investigación no fue aplicada, debido al COVID-2019, por ello, en un trabajo futuro se deberá aplicar la propuesta en una institución educativa para poder medir el impacto que provoca en el aprendizaje de funciones en la población estudiantil del subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador. Además, esta se deberá experimentar en un grupo para evaluar los resultados obtenidos.

#### **Enfoque de la investigación**

El enfoque de la investigación fue el cualitativo, porque esta ayudó a comprender la relación entre el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones y la semiótica matemática en el subnivel Superior de la Educación General Básica. Además, este enfoque permitió responder la pregunta de investigación a través de la interpretación de los datos encontrados

con los instrumentos, que fueron apoyados por el método analítico y el método inductivo, de lo particular a lo general (Bernal, 2010).

### **Tipo de investigación**

Mayormente el tipo de investigación fue analítico, porque buscó analizar el vínculo entre el tema de funciones y la semiótica, desde la información escrita del Currículo Nacional, PCI, PCA, PUD y los textos del Ministerio de Educación. Además, en el estudio se analizó la información recopilada de la observación participante y la encuesta a los docentes de Matemáticas. Toda la información recolectada fue la base de la estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador.

### **Métodos de la investigación**

La presente investigación aplicó dos métodos: el método inductivo y el método analítico. El método inductivo partió de una exploración al tema, tanto en la teoría como en la práctica (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010). En la parte teórica, el método orientó la revisión de los documentos de semiótica general, investigaciones de semiótica en el aula de clases de Matemáticas y semiótica en el tema de funciones. La cual favoreció a la construcción de los fundamentos teóricos entre la semiótica matemática y el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. Y en la parte práctica fue la observación de las clases de Matemáticas en el tema de funciones y la encuesta a los docentes. La cual fue realizada para obtener un diagnóstico práctico de la relación entre la enseñanza de funciones y la semiótica matemática.

De igual manera, el método analítico descompuso el objeto de estudio en sus componentes para estudiarlo en su totalidad (Bernal, 2010), es decir, este método contribuyó a diagnosticar la presentación de la semiótica matemática en el tema de funciones desde los distintos documentos (Currículo Nacional, PCI, PCA, PUD y textos del Ministerio de

Educación) para estudiarlo en su totalidad (partes, elementos, características, causas, efectos, principios). Lo que aportó a comprender la relación entre el aprendizaje de funciones y la semiótica matemática en este subnivel de educación. Además, toda la información recopilada en la fundamentación teórica y en los diferentes instrumentos fueron las bases para la construcción de la propuesta de la investigación.

### **Técnicas de recolección de la información**

Las técnicas aplicadas en el presente estudio fueron tres: observación participante, encuesta y análisis de contenido. La técnica de observación participante permitió la recolección de datos desde la situación observada (Bernal, 2010), es decir, esta diagnosticó la situación del proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. La cual fue evidenciada a través de fotografías (Ver anexo 8). Por tal razón, el objeto de estudio del presente proyecto de investigación fue la semiótica matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. También, este objeto de estudio fue por el previo análisis del libro de semiótica en la didáctica de matemáticas de D' Amore, et al., en el año 2013. Cabe recalcar que la guía de observación apoyó la técnica de observación.

La encuesta fue una técnica que sirvió para recolectar información desde el cuestionario (Bernal, 2010). Esta contenía preguntas abiertas y preguntas con posibles respuestas, todo con el fin de diagnosticar, desde una perspectiva práctica, la enseñanza de funciones en relación con su semiótica. La encuesta fue dirigida a cinco docentes de Matemáticas, y la aplicación de Google Forms apoyó esta técnica.

El análisis de contenido interpretó los datos escritos en los documentos para clasificar el contenido a categorías de forma ordenada y metódica (Fernández, 2002). Esta técnica diagnosticó la presentación de la semiótica matemática en el tema de funciones desde el Currículo Nacional, PCI, PCA, PDU y textos del Ministerio de Educación. Varias matrices y rúbricas apoyaron esta técnica.



En definitiva, las tres técnicas aplicadas en el estudio sirvieron para comprender la realidad educativa y alcanzar dos objetivos de la investigación que se refiere a diagnosticar, desde la práctica y la presentación de la relación entre semiótica y aprendizaje de funciones a través del análisis de documentos.

### **Instrumentos de recolección de la información**

En este proyecto, los instrumentos fueron: guía de observación, aplicación de Google Forms, matriz y rúbrica. La guía de observación apoyó la técnica de observación participante en las clases de Matemáticas. La guía tuvo como fin recolectar y obtener datos del hecho (Campo y Lule, 2012), es decir, este instrumento ayudó a centrarse en el objeto de estudio, en los objetivos planteados y los factores que intervinieron en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La guía de observación fue elaborada con indicadores que guiaron el objeto de investigación.

De igual manera, la aplicación Google Forms fue el instrumento digital que ayudó a la creación de las encuestas para los/las docentes de Matemáticas. La aplicación favoreció que la encuesta sea construida con preguntas abiertas y preguntas con posibles respuestas (SÍ-NO). Cabe recalcar que esta aplicación fue gratuita, fácil de manejar, eficiente y proporcionó resultados en línea en forma gráfica y escrita (Leyva, Pérez y Pérez, 2018).

La matriz de revisión fue el instrumento que apoyó la técnica de análisis de contenido del Currículo Nacional y PCA. La matriz del currículo fue creada mediante criterios: objetivos, DCD, criterio de evaluación e indicador de logro. Y la matriz del PCA fue diseñada con los criterios: grado, objetivos del curso, título de la unidad de planificación, objetivos, DCD, orientaciones metodológicas y evaluación. Todas estas matrices fueron referidas al tema de funciones y la relación entre la semiótica.

De igual manera, la rúbrica fue un instrumento que apoyó al análisis del PCI, PUD y textos del Ministerio de Educación. La rúbrica del PCI contenía los indicadores: enfoque, contenido, metodología, evaluación y planificación. La rúbrica para el análisis de los PUD

tenía los indicadores: título, objetivo, DCD, actividades, recursos y evaluación. Y la rúbrica para analizar los textos del Ministerio profundizó aspectos, tales como: contenidos, tipos de registros semióticos, secuencia de transformación de registros, actividades propuestas, ejercicios de conversión y símbolos matemáticos utilizados. El instrumento fue elaborado desde indicadores extraídos del marco teórico de la investigación. Todo lo anterior fue para diagnosticar la presentación de la semiótica matemática en los distintos documentos, y los resultados de estas fueron la base para la creación de la propuesta, último objetivo específico de la investigación.

### **Contexto del estudio**

La investigación fue en el contexto educativo ecuatoriano. En Ecuador, el Ministerio de Educación tiene la responsabilidad de ofrecer una educación completa, es decir, el o la estudiante tiene que cursar la Educación Inicial (2 años), Educación General Básica “EGB” (10 años) y Bachillerato (3 años) (Barrera, Barragán y Ortega, 2017). De acuerdo con su situación económica, el estudiante puede acceder a tres tipos de educación: pública, fiscomisional o privada. Las dos primeras obtienen recursos económicos del Ministerio de Educación de forma total o parcial, pero, los tres tipos obedecen a los reglamentos y estándares educativos establecidos por este organismo de educación. Por otra parte, la EGB está dividida en subniveles: preparatoria, elemental, media y superior. El subnivel Superior comprende el octavo, noveno y décimo grado, grados donde se aborda el tema de funciones.

### **Población del estudio**

La población de la investigación fueron los/las estudiantes que pertenecen al subnivel Superior de la Educación Básica, porque el tema de funciones en la asignatura de Matemáticas se inicia en este subnivel. Las características principales de esta población son: edad entre los 12 a 16 años, experimentación de la etapa de la adolescencia temprana, independencia, desarrollo de la personalidad y razonamientos más complejos (Güemes,



Ceñal, e Hidalgo, 2017). La población estudiantil de 5 a 14 años que asiste a clases es de 94,42% (83,95% en la mañana y 15,82% en la tarde) y el 5,58% no asiste a clases. La población entre 15 a 17 años, el 20,21% no asiste a clases porque trabaja, cuida a niños, falta de recursos económicos, no quiere estudiar, entre otros (Efstathios, 2020).

En definitiva, la población estudiantil que viven en el contexto ecuatoriano experimenta diferentes situaciones que influyen en la educación, por ejemplo, existe un número considerable de estudiantes que repiten el año lectivo al no cumplir con los requerimientos mínimos como es la asistencia o cumplimiento de deberes. También, existen casos donde los estudiantes no logran alcanzar la nota de 7/10, puntaje, para pasar al siguiente grado.

#### 4. Análisis y discusión de resultados

Este apartado expone los hallazgos obtenidos tras los análisis respectivos de los diferentes instrumentos investigativos. Estos se presentan en el siguiente orden: observación participante, encuesta a los docentes de Matemáticas, Currículo Nacional, Planificación Curricular Institucional (PCI), Planificaciones Curriculares Anuales (PCA), Planificaciones de Unidad Didáctica (PUD) y textos del Ministerio de Educación. Al analizar y discutir todos los resultados anteriores se procedió a realizar una triangulación de la información recopilada. La cual determina las coincidencias y diferencias de la información que permite a la propuesta de investigación tome las debidas recomendaciones (debilidades, falencias, oportunidades) y sea adaptable al contexto ecuatoriano.

##### 4.1 Observación participante

Antes de proceder a explicar el análisis y los resultados de la observación participante aclaro que el tema inicial de la presente investigación fue “La comprensión de la semiótica de álgebra y funciones en estudiantes del décimo grado de EGB de la Unidad Educativa “República del Ecuador”, es decir, el tema fue de una unidad didáctica del décimo grado. Lo cual se vio afectada por la pandemia del COVID-19 y produjo que el tema se delimitará y los datos recogidos sobre el tema actual sean pocos. Al producirse esta situación, el análisis de los datos recopilados fue de dos clases. Las observaciones se realizaron en el mes de enero del 2020, donde la población estudiantil presentaba varios problemas, uno de ellas se refiere a la utilización y conversión de las funciones.

Un ejercicio de transformación fue de registro verbal “f de x es igual a 6x más 10” a un registro algebraico  $f(x) = 6x + 10$ , y viceversa. Pero, la población estudiantil presentaba problemas de análisis, interpretación y conversión del registro semiótico y obtuvo como resultado  $(fx = 6) + 10$ . En este caso la población trabajo solo con los registros verbal y algebraico.

Otro ejemplo en el tema de funciones fue cuando se usaba el software GeoGebra, recurso que permite convertir de un registro algebraico a un registro gráfico de manera



automática (Ver anexo 8). Sin embargo, la mayoría de la población estudiantil presentaba problemas en la actividad, porque no identificaba los elementos, propiedades, finalidades, especialmente no estableció una relación entre un registro y otro. El registro tabular se excluyó, lo cual provocó que la población estudiantil desconociera el por qué se construye el registro gráfico, de donde surgen los pares de puntos  $(x, y)$  y las relaciones entre registros. Todo lo anterior provocó una incomprensión del objeto matemático, actividad, comunicación y el aprendizaje de funciones.

Además, las situaciones demostraron una contradictoria con las DCD (M.4.1.45 hasta M.4.1.61) que el MINEDUC en su currículo Nacional (2016a) propuso para el tema de funciones. Lo que afecta, el perfil de salida del bachiller ecuatoriano, porque cada estudiante ha de formarse integralmente para resolver problemas y modelos matemáticos desde funciones elementales.

#### **4.2 Encuesta a los docentes**

La encuesta conformada por preguntas abiertas y preguntas con posibles respuestas, pretende conocer la relación entre enseñanza de funciones y semiótica. A través de la aplicación Google Form, se recolecta los datos. Los datos son de la encuesta aplicada a cinco docentes de Matemáticas. A continuación, se presentan las preguntas formuladas con sus respectivas respuestas.

##### **1. Cuando usted enseña funciones, ¿qué estrategia sigue?**

- Ninguna
- Concreto, gráfico, simbólico
- Aprendizaje basado en retos
- Estrategia colaborativa, ABP, reproducción de vídeos, organizadores gráficos
- Trabajo colaborativo



De acuerdo con los datos proporcionados, los docentes de Matemáticas aplican diferentes estrategias que demandan al estudiante ser el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje. Es evidente que cada docente trabaja a su manera, pero, ninguna menciona la semiótica matemática. En otras palabras, la implementación de la semiótica como estrategia no se visualiza, lo cual puede afectar la enseñanza de funciones. Olvidando que varias investigaciones (Gonzales, 2011; Tocto, 2015) recalcan los beneficios que la semiótica matemática ofrece a la enseñanza-aprendizaje, tales como: comprensión y detección de las dificultades de la población estudiantil, apoyo para la dinámica de la clase y el desarrollo integral del estudiante.

## **2. ¿Cuándo usted enseña funciones que recurso tecnológico utiliza?**

- GeoGebra
- Videos, imágenes
- GeoGebra, gráficos en pizarrón
- Computadora, celular, proyector, Internet
- GeoGebra

De acuerdo con las respuestas, tres docentes concuerdan en utilizar el software GeoGebra para enseñar funciones. En este tema GeoGebra es un instrumento cognitivo que desarrolla la capacidad de comunicación, creatividad, razonamiento y reflexión sobre las transformaciones de los diferentes registros de una función. Al introducir una expresión algebraica se obtiene una tabla de valores, gráficos en 3D y 2D e incluye un comando de inserción de textos estáticos o dinámicos. Además, hay que reconocer que la población estudiantil está inmersa en una cultura tecnológica, donde el personal docente tiene que enseñar a usar y aprender con las TIC. Para la adaptación de las TIC al contexto cultural, Marqués (2012) recomienda tres ajustes a los centros docentes: escenario tecnócrata (alfabetización digital), reformista (el uso de las Tic como instrumento cognitivo) y escenario



holístico (reestructuración de los elementos). Asimismo, Geogebra y Graph son los recursos tecnológicos que el Currículo Nacional recomienda para el tema de funciones (MINEDUC, 2016a).

**3. ¿De cuántas maneras se puede representar una función, a parte de la manera algebraica?**

- Tres
- Gráfico
- Concreta, icónica, simbólico y generalización
- Cuadrática y lineal
- Plano cartesiano, diagrama de Venn

Las respuestas demuestran que existe una preferencia por el registro gráfico. No se utilizan los otros registros semióticos de la función, tales como: registro tabular y registro verbal. Los docentes olvidan que estos dos registros son claves para la enseñanza-aprendizaje de funciones. Desde este caso, me lleva a pensar que la enseñanza de funciones tiene que ser replanteada, cuyos ajustes sean el uso y conversión de los distintos registros semióticos de una función y creación de nuevos registros semióticos, que evidencie la construcción del conocimiento y la aplicación de habilidades y capacidades matemáticas.

**4. ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar una función?**

- Ninguna respuesta
- Factores de la función, analizar las partes de la función y graficar
- Identificar las variables, dar valores a la variable independiente, calcular los valores de  $(y)$ , ordenar cada par ordenado  $(x, y)$ , dar una escala apropiada al plano cartesiana do (1:2), ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano, unir cada par ordenado y comunicar la función general



- Presentar un vídeo, motivar, presentar el objetivo de la clase, presentar el concepto de la función a trabajar, ejemplificar, trabajo colaborativo en resolución de problemas de funciones, resolución de los problemas en la pizarra con los estudiantes y nueva tarea a casa para luego ver en qué fallan y finalmente retroalimentar
- Dar valores a  $x$ , construir una tabla de valores, representar la función en un plano cartesiano

Las respuestas obtenidas demuestran que aún existe una tendencia por mantener el mismo procedimiento, es decir, la función comienza con la expresión algebraica, pasa a una tabla de valores y termina con un gráfico. Al parecer, las otras formas de presentar una función, verbal-algebraica, gráfica- tabla de valores, tabla de valores-algebraica, algebraica-gráfica, gráfica-verbal, tabla de valores-verbal y viceversa, no son tomadas en cuenta. Lo que podría afectar a que el aprendizaje de funciones sea parcial y el perfil de salida del bachiller no cumpla con todos los requerimientos, tales como la utilización y comprensión de las ideas o conceptos matemáticos para resolver problemas o modelos matemáticos contruidos con funciones elementales (MINEDUC, 2016a).

Intencionalmente se agrupan tres de las preguntas porque las respuestas fueron afirmativas en las tres preguntas. En las preguntas: **5. En una función ¿usted utiliza la representación gráfica?**, **6 ¿Usted formula una expresión algebraica?** y **8 ¿Usted formula una tabla de valores?** Todos los docentes encuestados concuerdan con usar los registros: gráfico, algebraico y tabular para representar una función. En la enseñanza de funciones se utilizan diversas representaciones, todo con el fin de favorecer el aprendizaje de la población estudiantil y la disminución de los problemas conceptuales (Oviedo, et al., 2012). Entonces, la utilización de los diferentes registros semióticos de una función es conveniente e indispensable, porque analiza las diversas vías acceso que una función puede tomar para presentarse en la vida cotidiana. Además, estas favorecen a que el estudiante comprenda las diversas situaciones de su vida y de la sociedad.





**7. Para representar una función, ¿Usted formula un enunciado en lenguaje común?**

De los cinco docentes encuestados, tres formulan un enunciado (registro verbal) para representar una función. El registro verbal es la combinación de palabras, letras y números, que representa una función de manera más sencilla. Desde esta situación se puede deducir que los tres docentes consideran al registro verbal como importante para comprender y representar una función, pues a través de un enunciado se puede explicar qué es, cuáles son los componentes y la finalidad de la función en la vida cotidiana. Sin embargo, los dos docentes que no utilizan el registro verbal para representar una función, posiblemente, sus estudiantes no comprendan cuando se presenten casos de la vida cotidiana, tal como: el costo de un producto.

**9. Cuando a usted le presenta una función desde una representación gráfica ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar la misma función a una tabla de valores?**

- Ninguna respuesta
- Ubicación de los pares, utilización de la representación general, tomar y sustituir los valores de los pares a la ecuación y comunicó la ecuación de la gráfica
- Tomar puntos y luego reemplazarlos en la función
- Reconocimiento de valores, identificación de la función, análisis de la gráfica
- Dar valores a x, construir una tabla de valores, representar en un plano cartesiano.

Desde las respuestas anteriores se evidencia que la transformación de un registro gráfico a un registro tabular es de la siguiente manera: ubicación de los pares de puntos, toma de valores y sustitución de los valores a la representación general. No se evidencian otras formas de convertir un registro gráfico a una tabla de valores. Posiblemente, esto se debe a que otros sistemas semióticos poseen un nivel de complejidad alta, lo que coloca al



estudiante en una situación bastante desafiante. Y para evitar esta situación, el docente procede a enseñar de la manera más sencilla los pasos a seguir para transformar de un registro gráfico a una tabla de valores.

**10. Cuando a usted le presenta una función desde una tabla de valores, ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a una expresión algebraica?**

- Ninguna respuesta
- Utilizar la representación general, tomamos un par ordenado, sustituimos, resolvimos las ecuaciones obtenidas, reemplazo los valores y comunico la ecuación de la tabla.
- Poniendo los puntos en el plano cartesiano
- Resolución de la tabla de valores, identificar la expresión algebraica y resolución
- .- Ninguna respuesta

De los cinco docentes encuestados, dos no contestan y tres poseen ideas diferentes. La respuesta que más se asemeja a una conversión de registro tabular a registro algebraico es la segunda respuesta. Esta señala a detalle los pasos a seguir, es decir, explica el tratamiento que se debe seguir para una conversión de este tipo. Pero como toda conversión, el tratamiento a seguir depende de las condiciones y a los fines de aprendizaje (Oviedo, et al., 2012).

**11. Cuando a usted le presenta una función desde una representación algebraica o fórmula, ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a una gráfica?**

- Ninguna respuesta
- Identificar las variables, dar valores a la x, calcular los valores de la y, ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano, unir cada par ordenado y comunicar.



- Análisis, factorización, representación,
- Identificación del tipo, dibujar, representar en la gráfica los valores
- Ninguna respuesta

Las respuestas evidencian que la conversión de registro algebraico a registro gráfico puede ser de dos maneras. Una se refiere a utilizar el registro tabular para llegar al gráfico, mientras, la otra suprime este registro y va directamente a la gráfica de la función. Plantear situaciones como la anterior en la enseñanza de funciones favorece a que la población estudiantil conozca distintas formas de llegar a un mismo resultado. Sin embargo, hay que tener en cuenta las características de la población estudiantil y la situación del aula.

**12. Cuando a usted le presenta un enunciado de una función ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a una expresión algebraica?**

- Ninguna respuesta
- Representar a una tabla de valores, buscar un método para resolver, resolver las ecuaciones, comprobar resultados y presentar la función a una expresión.
- Reconocer la función, resolución del problema y sacar el resultado
- Ninguna respuesta

Desde estas respuestas, la idea que resalta es la segunda, debido a que, presenta una nueva forma de convertir de un enunciado a una expresión algebraica, dejando a lado los típicos pasos. Tales como: detectar las variables y reemplazar con letras, caracterizar la función y elegir la fórmula o ecuación (primer o segundo grado) que mejor se adapte. Se evidencia que existen otras maneras de convertir este tipo de registro, lo que llama la atención e incentiva a que la población estudiantil siga construyendo nuevas formas de convertir una función con el método heurístico. El método heurístico se caracteriza por poseer diversos caminos o formas de resolver problemas o situaciones, es decir, no existe un



solo método que lleve a un resultado confiable. Por ello, el docente en el aula de clases ha de impulsar y crear espacios necesarios para que cada estudiante descubra nuevas formas de representar una función.

**13. Cuando a usted le presenta un gráfico de una función ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a un enunciado?**

- Ninguna respuesta
- Ubicación de los pares, observar la gráfica, utiliza la fórmula general, tomamos valores, reemplazamos a la fórmula, resuelvo la fórmula y comunico.
- Interpretó el gráfico
- Reconocer la función, identificar valores y convertirla en enunciado
- Ninguna respuesta

Desde estas respuestas se evidencia que los docentes tienen diversas maneras de convertir un registro gráfico a un registro verbal (enunciado). Uno de ellos procede a seguir varios pasos transitando por varios registros. Mientras, otro interpreta desde el gráfico, es decir, no realiza ninguna conversión. En este último caso, el estudiante quien recién está familiarizándose, posiblemente, no logre la comprensión del tema, ya que, la conversión de un registro a otro facilita la comprensión y el aprendizaje de funciones: componentes, propiedades y utilidades en la vida académica y social.

**14. Cuando a usted le presenta una tabla de valores de una función ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a un enunciado?**

- Tabla, gráfica y enunciado
- Representación general, tomar un par ordenado, sustitución, resuelvo la ecuación, factorizo y comunico en un enunciado
- Gráfico y luego interpreto



- Identificar valores, reconocer el tipo de función y convertirla en enunciado.
- Ninguna respuesta

Las respuestas obtenidas de esta pregunta señalan que la mayoría de los docentes encuestados siguen los pasos: toma de valores, representación gráfica y creación de un enunciado. A pesar de que esta es la forma más conocida de convertir un registro tabular a un registro verbal (enunciado), existen otras formas para transformar, tal como: tabla-fórmula-enunciado o tabla- enunciado.

### **15. ¿Cuándo usted enseña funciones, cómo evalúa al estudiante?**

- Ninguna respuesta
- Formativa
- Por una prueba
- Evaluación formativa-sumativa
- Evaluó el procedimiento

De los cinco docentes encuestados, dos señalan que realizan una evaluación sumativa y dos realizan una evaluación formativa. Se observa que la evaluación está mejorando, si bien es cierto, años atrás existía una tendencia por la evaluación sumativa, ahora las dos formas de evaluar mantienen un equilibrio. Con la aplicación de las dos evaluaciones el docente puede valorar el desempeño del estudiante con las actividades cognitivas que realiza en el aula de clases y a la vez demostrar con evidencias (pruebas) que la población estudiantil aprende funciones.

### **16. De acuerdo a todo lo anterior, Usted considera que es necesario realizar un estudio de las diferentes representaciones y conversiones de la función para favorecer el aprendizaje de los estudiantes de la Educación**



### **General Básica del Ecuador.**

- Sí
- Sí considero que se debe motivar a los estudiantes a realizar retos matemáticos que faciliten la comprensión de la matemática
- Sí
- Sí pienso que como docentes fallamos en didáctica, debemos conocer nuevos caminos más llamativos y significativo
- Es necesario para conocer otras representaciones de funciones, para que los estudiantes comprendan mejor este proceso.

Todas las respuestas fueron “Sí”, es decir, todos los docentes encuestados coinciden conmigo en lo importante y pertinente que es el estudio de la semiótica matemática en relación con el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de Educación General Básica del Ecuador. A todos nos preocupa el aspecto semiótico de una función dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que, la conversión de una función a sus cuatro registros semióticos juega un rol importante para el aprendizaje de la población estudiantil. A través de la conversión cada estudiante puede ir creando conocimientos nuevos y desarrollando habilidades y capacidades que le ayuden a enfrentar y comprender la realidad de mejor manera. Asimismo, le ayuda a diferenciar entre un objeto matemático y su representación, comprender el tema de funciones, desarrollar y resolver las actividades sin ninguna dificultad.

### **4.3 Currículo Nacional**

El Currículo Nacional (MINEDUC, 2016a) establece destrezas con criterio de desempeño (DCD) para cualquier tema. Para el tema de funciones, las DCD están en las páginas 883 y 884. Y en las páginas 892 y 893 está el criterio de evaluación e indicadores de logro que el personal docente tiene que considerar para valorar el desempeño de sus estudiantes del subnivel superior. Asimismo, en el análisis se usa una matriz compuesta por

objetivo del área, DCD, criterio de evaluación e indicadores de logro. Todo con el fin de diagnosticar la presentación de la semiótica matemática en el tema de funciones. A continuación, la tabla con los datos recopilados.

**Tabla 1**  
*Elementos curriculares del tema funciones*

<b>Elementos</b>	<b>Descripción</b>
Objetivo del área	<p>“O.M.4.1. Ordenar los números enteros, racionales, irracionales y reales y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas)” (p. 888).</p> <p>“M.4.1.44. Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica, con diagramas de Venn, determinando su dominio y recorrido en <math>Z</math>” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.45. Representar funciones de forma gráfica, con barras, bastones y diagramas circulares, y analizar sus características (p. 883).</p> <p>“M.4.1.46. Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.47. Definir y reconocer funciones lineales en <math>Z</math>, con base en tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica, con o sin el uso de la tecnología” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.48. Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.49. Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.50. Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología), e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.51. Definir y reconocer funciones potencia con <math>n=1, 2, 3</math>, representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.52. Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas” (p. 883).</p> <p>“M.4.1.56. Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales...; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema” (p. 884).</p> <p>“M.4.1.57. Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica, determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos y paridad” (p. 884).</p> <p>“M.4.1.58. Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita” (p. 884).</p> <p>“M.4.1.61. Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema” (p. 884).</p>
Destreza con criterio de desempeño	
Criterio de evaluación	<p>“CE.M.4.3. Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia..., y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales” (p. 888).</p> <p>“I.M. 4.3.2. Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones: emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema” (p. 889).</p>



Indicador de logro

“I.M.4.3.3. Determina el comportamiento (función creciente o decrecimiento) de las funciones lineales en  $Z$ , basándose en su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas; valora el empleo de la tecnología, y calcula funciones compuestas gráficamente. (I.4)” (p. 889).  
“I.M.4.3.4. Utiliza las TIC para graficar funciones..., reconoce cuando un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares” (p. 889).

---

**Fuente:** elaboración propia, 2020, con base del Currículo Nacional del MINEDUC, 2016a.

La tabla N° 1, muestra que la semiótica matemática es muy importante en el Currículo Nacional, porque incluye 13 Destrezas con Criterio de Desempeño (DCD) que la población estudiantil debe lograr en los tres últimos grados de la educación básica. Dos DCD se refieren a definir y resolver una función desde el registro tabular, cuatro DCD describen el aprendizaje a lograr con respecto al registro algebraico y el registro gráfico comprende siete DCD. Sobresale la destreza M.4.1.45 porque señala sólo la representación de una función en el registro gráfico, sin mencionar los registros: verbal, algebraico y tabular, que como hemos visto son claves para el aprendizaje de funciones en la población estudiantil.

Por tal razón, la implementación de la semiótica es necesaria e indispensable en el aula de clases, ya que a través de ella se puede ir resolviendo los diferentes registros semióticos de una función, sin dar más importancia a un registro que a otro. Además, Ginsberg (2015) señala que la resolución y la transformación de los diferentes registros semióticos de una función son claves para el aprendizaje de cada estudiante. El trabajo con los cuatro registros permite comprender el concepto, los componentes y finalidades de una función; y cumplir con el criterio de evaluación (CE.M.4.3) que se refiere a definir, reconocer, analizar y resolver problemas de funciones en la vida cotidiana.

#### **4.4 Planificación Curricular Institucional**

La Planificación Curricular Institucional (PCI) lo realizan el personal docente y las autoridades cada 4 años para establecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. Al aclarar esto conviene señalar que la PCI se analiza para diagnosticar la presentación de la semiótica matemática en el tema de funciones. Para el análisis se utilizan varios criterios, tales como:





enfoque, contenidos de aprendizaje, metodología y evaluación y planificación. Todas estas ayudan a considerar los factores y componentes que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. A continuación, se presentan los criterios analizados:

- **Enfoque** en la PCI se señala una orientación hacia el constructivismo, es decir, el estudiante es el protagonista de su aprendizaje y el docente es el guía y facilitador de actividades, recursos o instrumentos para que la población estudiantil aprenda. Entonces en el tema de funciones, el docente guía al estudiante para que construya conocimiento y desarrolle capacidades y habilidades, tales como utilización del concepto función, construcción de tratamientos heurísticos que permitan convertir de un registro a otro o el análisis y solución de situaciones matemáticas o de la vida cotidiana relacionados al tema de funciones.
- **Contenido de aprendizaje** se refiere al conjunto que abarca los tres tipos de contenido: conceptual, procedimental y actitudinal. De acuerdo con el PCI, el tema de funciones del subnivel Superior parte de los objetivos OI.41 hasta OI.4.12. Incluye la desagregación de las DCD del currículo Nacional, sin embargo, las DCD (M.4.1.46. hasta M.4.1.57, excepto las DCD M.4.1.51 y M.4.1.58) no tienen desagregación. Las dos destrezas que son excluidas se refieren a las funciones (potencia y cuadrática), específicamente a la definición, reconocimiento y representación en registro gráfico y registro algebraico (ecuación). Además, se evidencia que la destreza M.4.1.61 no se plasman en el PCI. Esta destreza se refiere al uso de las TIC en la resolución y planteamiento de problemas con enunciados (registro verbal) desde modelos con funciones cuadráticas.
- **Metodología** se refiere al conjunto de métodos y técnicas que favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el tema de funciones, probablemente, el método es el ABP y las técnicas son TIC, taller, resolución de problemas y observación. La metodología que seleccione el personal docente es clave para aprender funciones,



pero, esta depende de varios factores, tales como: la situación del aula, contexto y necesidades e intereses de la población estudiantil.

- **Evaluación** es parte del proceso de enseñanza-aprendizaje. Según el PCI, las formas de evaluar son de tres maneras (diagnóstica, formativa, sumativa) con el apoyo de técnicas e instrumentos (tareas). En el tema de funciones se incluye el criterio de evaluación CE.M.4.3. La cual puede valorarse a través de las actividades cognitivas, tales como resolución de problemas. Asimismo, la evaluación es un principio de la NCTM que valora las acciones de los miembros y el sistema educativo. La evaluación es indispensable, porque proporciona datos valiosos sobre las acciones de los miembros educativos, la cual permite detectar las fallas y fortalezas.
- **Planificación:** en el PCI se señalan dos planificaciones: Planificación Curricular Anual (PCA) y la Planificación de Unidad Didáctica (PUD). Estas son revisadas por la Junta de Área y comisiones técnico-pedagógicas. El PCA lo realizan los docentes de Matemáticas y se presenta en la primera semana del año lectivo. Y el PUD lo realiza cada docente y se entrega al jefe de área una semana antes de que inicie el I y II quimestre. Enfatizando que el vicerrector/a de la institución es el encargado de realizar un seguimiento de la implementación de las dos planificaciones. Entonces, para conocer a detalle el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones se tiene que analizar el PCA y PUD. En los siguientes apartados se analizan el PCA y PUD.

#### 4.5 Planificaciones Curriculares Anuales

Las Planificaciones Curriculares Anuales (PCA) son documentos de segundo nivel de concreción curricular que lo realiza el personal docente y directivos para señalar de manera general todo lo que se trabajará en el año lectivo. En este caso, el análisis de las PCA es de octavo, noveno y décimo grado, porque, estos grados pertenecen al subnivel Superior y según el Currículo Nacional (MINEDUC, 2016a), el tema de funciones se aborda en estos grados. El análisis del PCA tiene como fin diagnosticar la presentación de la semiótica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones. Como un dato extra estas planificaciones son para 40 semanas de trabajo (4 de evaluaciones y 36 de clases) con 6 horas semanales y cada unidad está planificada para 6 semanas de duración. Para analizar los PCA se utiliza una matriz construida con criterios: grado, objetivo del curso, título de la unidad, objetivos, DCD, orientaciones metodológicas y evaluación.

**Tabla 2**

*Planificaciones Curriculares Anuales*

Grado	Objetivo del curso	Título de la unidad de planificación	Objetivos de la unidad de planificación	Destrezas con Criterio de desempeño	Orientaciones metodológicas	Evaluación
Octavo	Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros; ordenar estos números y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de					



	<p>procesos algebraicos y de las funciones y fomentar el pensamiento lógico y creativo. Ref. O.M.4.1.</p>		<p>Resolver problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema.</p> <p>Determinar el comportamiento de las funciones lineales en <math>Z</math>, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas</p>	<p>- M.4.1.44. - M.4.1.48. - Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología) Ref. M.4.1.50. - M.4.1.52.</p>	<p>Con este criterio se valora la capacidad del estudiante para utilizar el razonamiento lógico y manejar reglas, técnicas, cuantificadores, proposiciones o hipótesis para determinar si un argumento es válido o no; además de su habilidad para entender conceptos y establecer relaciones basadas en la lógica de forma esquemática y técnica.</p> <p>Este criterio está implícito en el resto de bloques y áreas, ya que el razonamiento lógico se utiliza en la demostración de teoremas, leyes y fórmulas, y para inferir resultados,</p>	<p><i>Criterio de evaluación:</i> CE.M.4.3. Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología.</p> <p><i>Indicador para la evaluación del criterio:</i> Determina el comportamiento (función creciente o decreciente) de las funciones lineales en <math>Z</math>, basándose en su tabla de valores o en gráficas. (I.4.) Ref. I.M.4.3.3.</p>
<p>Noveno</p>	<p>Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros, racionales, irracionales; ordenar estos números y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas); y fomentar el pensamiento lógico y creativo. Ref. O.M.4.1.</p>	<p>Unidad 4: Conjuntos y funciones lineales</p>				

Décimo	<p>O.M.4.1. Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros, racionales, irracionales y reales; ordenar estos números y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas); y fomentar el pensamiento lógico y creativo.</p>	<p>Unidad 2: Funciones lineales.</p>	<p>Identificar los elementos y comportamiento de una función con el apoyo de las TIC.</p> <p>Definir y reconocer funciones lineales representándolas gráficamente en la aplicación de modelos matemáticos en la solución de problemas.</p>	<p>- M.4.1.48. - M.4.1.49. - M.4.1.50. - M.4.1.52.</p>	<p>sacar conclusiones de experimentos, y resolver situaciones problema en cualquier actividad.</p> <p>Representa situaciones de la realidad mediante funciones, construyendo tablas de valores para graficar funciones y analiza la valides de la solución.</p> <p>Determina la monotonía de funciones con el apoyo de las TIC.</p> <p>Resuelve ecuaciones de primer grado con una incógnita en R, de manera Gráfica y/o algebraica.</p> <p>Determinar el comportamiento local y global de una función, y reconocer las particularidades de la función mediante su</p>	<p><i>Criterio de evaluación:</i> CE.M.4.3. Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología.</p> <p><i>Indicadores para la evaluación del criterio:</i> I.M.4.3.1. Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos, e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto. (I.4.)</p> <p>I.M.4.3.2. Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e</p>

<p>Unidad 4: Funciones y ecuaciones cuadráticas.</p>	<p>Representar y resolver de forma gráfica y analítica con el apoyo de las TIC funciones y ecuaciones cuadráticas aplicándolas en situaciones concretas.</p>	<p>M.4.1.57.</p>	<p>expresión analítica o gráfica.</p> <p>Reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función cuadrática y lo resuelve.</p>	<p>interpretar la solución en el contexto del problema. (I.2.) I.M.4.3.3. <i>Criterio de evaluación:</i> CE.M.4.3. Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología.</p> <p><i>Indicador para la evaluación del criterio:</i> I.M.4.3.4. Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia (<math>n=1, 2, 3</math>), y para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente intersecciones), la función potencia (monotonía) y la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares. (J.1., I.4.)</p>
--	--	------------------	--	--

Fuente: elaboración propia, 2020.

De acuerdo a la tabla N° 2, en el octavo grado, el tema de funciones se omite. Entonces, en el noveno grado se inicia el tema con el estudio de funciones lineales y en el décimo grado se aborda las funciones cuadráticas. En estos dos grados son seis DCD del Currículo Nacional, de las cuales 4 se refieren a definir y reconocer una función a partir del registro gráfico, tabular y algebraico. Exclusivamente, la DCD M.4.1.52 señala la representación e interpretación de modelos matemáticos con funciones lineales. Para ello, el personal docente tiene que analizar y explicar una función desde sus diferentes registros semióticos con el uso de recursos tecnológicos, porque en uno de los objetivos de la planificación se declara la utilización de las TIC.

Asimismo, las 7 DCD (45, 46 47, 49, 56, 58, 61) que son excluidas puede perjudicar la formación del estudiante, quien tiene que resolver problemas en la vida personal y social con funciones elementales de distintas formas. La exclusión de DCD coloca al estudiante a una situación de exclusión social y daño a su proyecto de vida personal y académica, por ello, es recomendable incluir las DCD y trabajar con la semiótica matemática. La semiótica ofrece a cada estudiante una comprensión del concepto y sus distintas maneras de representación y los beneficios al aprender funciones.



#### 4.6 Planificaciones de Unidad Didáctica

Las Planificaciones de aula o Planificaciones de Unidades Didácticas (PUD) informan el desarrollo de la planificación docente, es decir, detallan las acciones y procedimientos a seguir. En este caso, los PUD del subnivel Superior son 10, de las cuales solo 3 corresponden al tema de funciones y estas son del décimo grado. El análisis es bajo los siguientes criterios: título, objetivo, DCD, actividades, recursos y evaluación, todo con el fin de diagnosticar la presencia de la semiótica. Cabe recalcar que cada planificación tiene un código: P1, P2 y P3, respectivamente.

- **Título:** la primera planificación (P1) se denomina “Funciones lineales”, la segunda (P2) se denomina “Sistemas de ecuaciones lineales” y la tercera se denomina “Funciones y ecuaciones cuadráticas”. Al parecer, los títulos de las planificaciones aclaran qué tipo de funciones son abordadas en las clases de funciones. La cual centra al docente a prepararse mejor en un solo tipo, pero, el Currículo Nacional (MINEDUC, 2016a) plantea el abordaje de más tipos de funciones, tales como: potencia, afín, creciente, decreciente, constante. En otras palabras, solo se está cumpliendo con una parte.
- **Objetivo:** el objetivo que persigue P1 son dos: la identificación de los elementos y el comportamiento de una función a través de las TIC, y reconocer y representar funciones lineales desde el registro gráfico para resolver problemas. El objetivo de P2 se subdivide en varios, pero, todas se enfocan a funciones lineales, registro algebraico y gráfico, uso de las TIC, solución de problemas. Y el objetivo de P3 tiene varios objetivos específicos que relacionan a funciones lineales y cuadráticas, el uso de las TIC, registro: gráfico y algebraico, modelos matemáticos y solución de problemas o situaciones concretas. Entonces, el objetivo del tema de funciones es resolver problemas o situaciones concretas desde los registros gráfico y algebraico, las cuales permitan identificar los elementos, propiedades y los beneficios de una función lineal





o cuadrática. Lo cual excluye a los otros dos registros semióticos: verbal y tabular.

Los registros semióticos excluidos son indispensables para comprender desde donde se construye la gráfica, cuáles son los datos, cuál es el conjunto de partida y de llegada. También estas influyen a que el estudiante pueda resolver problemas o modelos matemáticos con y sin el uso de las TIC.

- **Destrezas con criterio de desempeño** en la P1 son de M.4.1.47 hasta M.4.1.53. En la P2 las DCD son M.4.1.49 hasta M.4.1.56., excepto la M.4.1.51. Y en la P3 son M.4.1.54 hasta M.4.1.59., excepto la M.4.1.58. Enfatizando que ninguna de las anteriores DCD fue desagregada. Las DCD son acciones del “saber hacer” que el personal docente debe desarrollar para que el aprendizaje de funciones le contribuya a la vida en el presente y en el futuro de sus estudiantes. Asimismo, existe una contradicción con las DCD y el objetivo de la planificación, porque las DCD abarcan más tipos de función y el registro tabular de una función, mientras que el objetivo sólo mencionaba a la función lineal y cuadrática, y el empleo de solo dos registros semióticos: gráfica y algebraica. Al parecer existe una discrepancia entre los componentes de las planificaciones, lo cual genera problemas entre meta y acciones de llegar a esa meta.
- **Actividades** en la P1 son: responde las preguntas exploratorias, observa videos, trabaja individual o en equipo para resolver problemas, realiza auto y coevaluación. Las actividades de P2 son: responde las preguntas exploratorias, realiza lecturas, representa una función en un plano cartesiano, trabaja grupalmente para analizar una función en forma gráfica y algebraica, y discute sobre los hallazgos encontrados de la resolución de problemas. Las actividades de la P3 son responde las preguntas exploratorias, realiza lecturas analíticas y de comprensión, analiza las actividades resultas del texto, analiza la gráfica y expresión algebraica de funciones cuadráticas, comenta en la clase sobre el análisis realizado y trabaja grupal e individual en la resolución de problemas del texto.



En las tres planificaciones analizadas, las actividades propuestas fomenta a que cada estudiante sea el protagonista de su aprendizaje, especialmente, la resolución de los problemas aluden a los registros semióticos de una función. Esta actividad es muy buena porque desarrolla sus habilidades y capacidades, sin embargo, sólo el análisis de los ejercicios delimita al estudiante. El estudiante tiene que construir sus conocimientos y desarrollar sus habilidades y capacidades con la práctica. Las actividades pueden ser convertir de un registro semiótico de una función a otro registro y crear nuevos registros que representan una función.

- **Recursos** en la P1 son texto del estudiante 10 de básica, pizarra, computadora, sala de audiovisuales con conexión a la red, TIC, hojas de trabajo y software Graph. En la P2 los recursos son texto del estudiante 10 de básica, pizarra, cuaderno de trabajo, hojas de trabajo y laboratorio: GeoGebra. Y en la P3, los recursos son: texto del estudiante 10 de básica, cuaderno de trabajo, hojas Perforadas, laboratorio de computación, computadoras, proyector, software: GeoGebra. Al parecer, los recursos que se utilizan en las clases son casi iguales a diferencia que en la P1 se usa el software Graph y en las otras se utiliza el software GeoGebra. Estos dos softwares benefician al proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones, cumple con uno de los principios de la educación matemática: la utilización de las TIC en la enseñanza y toma en cuenta las orientaciones del Currículo Nacional (MINEDUC, 2016a).
- **Evaluación** es un componente de la planificación que abarca dos elementos: indicadores de logro y técnicas-instrumentos. En la P1, los indicadores son I.M.4.3.2 y I.M.4.3.3., las técnicas son resolución de problemas, ejercicios colectivos y aula invertida. Y los instrumentos son pruebas, hoja de ejercicios y hoja de resumen, respectivamente. En la P2, el indicador es I.M.4.3.3. Las técnicas son ejercicios colectivos, aula invertida, trabajo grupal e individual, y los instrumentos respectivos son hoja de verificación, hoja de resumen, rúbrica de trabajo individual y rúbrica de trabajo grupal. Y en la P3, el indicador es I.M.4.3.4. Las técnicas son trabajo grupal y



trabajo individual junto a los instrumentos: rúbrica de trabajos grupales y rúbrica de trabajos individuales, respectivamente.

Desde esta información, se evidencia que los indicadores de logro no son desagregados, la cual demanda que una o dos DCD sean verificadas. Por ejemplo, en la P3 el indicador es I.M.4.3.4 la cual se refiere al uso de las TIC para realizar el registro gráfico de funciones lineales, cuadráticas y potencia, y analizar las características de estas funciones (MINEDUC, 2016a). Sin embargo, la función potencia no fue abordada, lo que demuestra que no se cumple cabalmente el indicador de logro. A pesar de esta controversia se evidencia que si existe una relación entre la técnica y el instrumento de evaluación.

#### 4.7 Textos del Ministerio de Educación

Este apartado presenta el análisis de los textos (MINEDUC, 2020a, 2020b, 2020c) para diagnosticar la presentación de la semiótica matemática en el tema de funciones. Los textos son tomados en consideración porque son recursos que la población estudiantil utiliza en su proceso de aprendizaje y el personal docente utiliza como guía en la enseñanza de funciones o instrumento de evaluación del desempeño de la población estudiantil. Cabe recalcar que el Ministerio de Educación entrega estos textos cada año lectivo. A continuación, se presentan los resultados obtenidos desde categorías, tales como contenidos, ejemplos y actividades. Desde estas categorías se analizan los tipos de registros semióticos de una función, la conversión desde ejercicios explicativos y talleres propuestos para la población estudiantil.

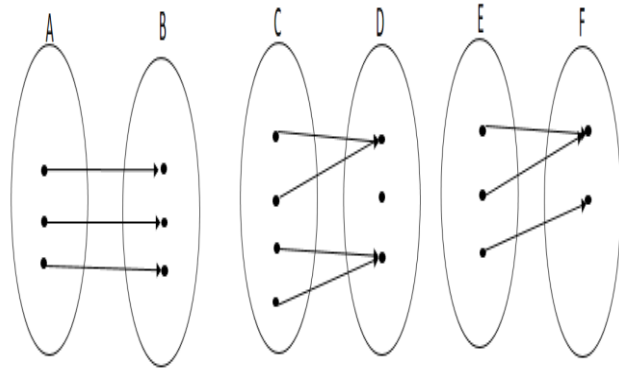
- **Contenidos** abarca los subtemas, el concepto de función y sus representaciones, y los símbolos matemáticos utilizados en el tema de funciones. Se analizan estos aspectos porque responden al qué enseñar y cómo enseñar.
- **Subtemas** en el tema de funciones abarca varios subtemas que se abordan en el subnivel Superior. En el texto de octavo grado se presenta un subtema denominado “Función”, este está en la sexta unidad “La matemática en el mundo”, en las páginas 226 y 229. Aquí se explica de manera general lo que es una función, cuáles son los

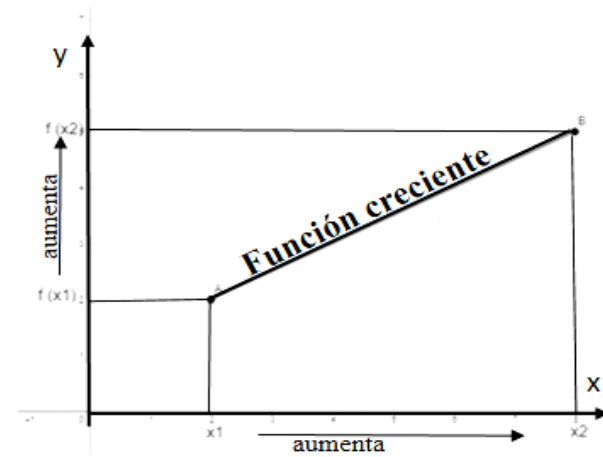


componentes, propiedades y el registro gráfico de una función (diagramas de Venn). Finalmente, presenta tres ejercicios y un taller con destrezas. En el noveno grado, el tema de funciones está dividido en tres subtemas: funciones, funciones crecientes, decrecientes y constantes, y función lineal y afín. Estos subtemas están en la unidad seis “La matemática en la modelización de los fenómenos”, en las páginas 218 hasta 229. Cada subtema tiene ejemplos explicativos y un taller con una o varias destrezas. Y en el décimo grado, este tema contiene cinco subtemas: funciones, modelos matemáticos como funciones; función real; función lineal; función potencia y función cuadrática. Los subtemas están en la tercera unidad “Funciones y triángulos rectángulos”, páginas 218 hasta 226. Y en la quinta unidad “Ecuaciones, deporte y matemática” está el último subtema desde la página 174 hasta 177. Al parecer en distintos grados se abordan diversos subtemas, pero todas focalizadas en el tema de funciones. También, se aprecia que los tipos de funciones son cinco, de las cuales todas coinciden con lo que establece el Currículo Nacional (MINEDUC, 2016a), es decir, si en las clases se aborda todos los subtemas, los textos pueden ser los instrumentos de trabajo o de evaluación de la población estudiantil. Además, puede ser una guía de consulta, donde el estudiante acuda para resolver dudas e inquietudes.

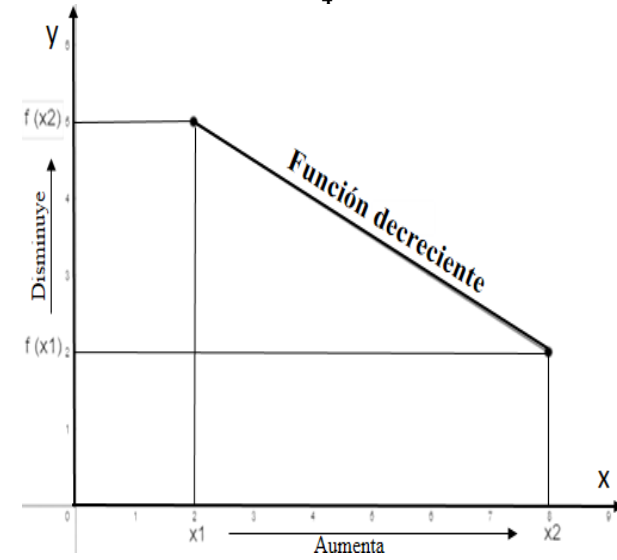
- **Concepto de función y registros semióticos:** este concepto se refiere al cómo se define una función y cuáles son sus formas de representación. En la siguiente tabla se presenta los diferentes conceptos de función junto a sus diferentes registros semióticos. Esta tabla usa nomenclaturas como  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  para el registro algebraico, tabular y gráfico, respectivamente.

**Tabla 3**  
*Registros Semióticos de Función*

Concepto de función	Registro algebraico: r1	Registro tabular: r2	Registro gráfico: r3
<p>La función “es una relación entre dos conjuntos A y B, que asigna a cada uno de los elementos del conjunto A (dominio o partida) uno y solo uno de los elementos del conjunto B (rango o llegada)” (MINEDUC, 2020a, p. 226)</p>			<p><math>R_3^1</math>:</p> 
<p>Función es la relación que un elemento del conjunto de partida le corresponde únicamente un elemento del conjunto de llegada. Toda función es una relación, pero no toda relación es función (MINEDUC, 2020b).</p>		<p><math>R_2^2: f: x \rightarrow y</math> <math>f(x) = x</math></p>	
<p>“La función es creciente en un intervalo si a medida que aumenta el valor de x aumenta el valor de y” (MINEDUC, 2020b, p. 223).</p>		<p><math>R_2^3: x_1 &lt; x_2 \rightarrow f(x_1) &lt; f(x_2)</math></p>	<p><math>R_4^3</math>:</p>



$R_{\frac{4}{2}}$



$R_{\frac{5}{4}}$

“La función es decreciente en un intervalo, si a medida que aumenta el valor de  $x$ , disminuye el valor de  $y$ ” (MINEDUC, 2020b, p. 223).

$$R_{\frac{4}{2}}: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

“La función es constante en un intervalo, si a medida que aumenta el

$$R_{\frac{5}{2}}: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

valor de x, se mantiene el mismo valor de y” (MINEDUC, 2020b, p. 223).

La función lineal es una línea recta que pasa por el origen: (0, 0). La función es creciente si  $m > 0$  y decreciente si  $m < 0$ ,  $m$  es cualquier número distinto de cero. El dominio de la función lineal es  $\mathbb{R}$  y su rango también son todos los  $\mathbb{R}$  (MINEDUC, 2020b).

$$\mathbb{R}_2^6: y = mx$$

Función afín es una línea recta que no pasa por el origen de las coordenadas. El valor de  $m$  es la pendiente, el número  $b$  es la ordenada del origen. La recta corta al eje  $y$  en el punto (0,  $b$ ) (MINEDUC, 2020b).

$$\mathbb{R}_2^7: y = mx + b$$

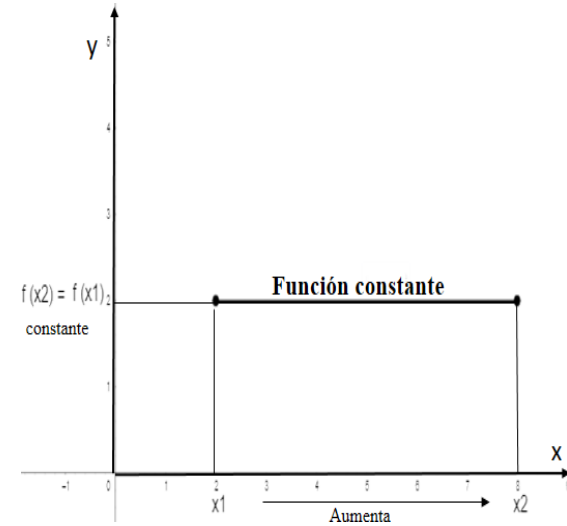
La función “es una relación o correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto  $A$ , uno y solo un elemento de un conjunto  $B$ ” (MINEDUC, 2020c, p. 98).

$$\mathbb{R}_2^8: f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = 10x$$

“Función real es una función matemática que hace corresponder a

$$\mathbb{R}_2^9: f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

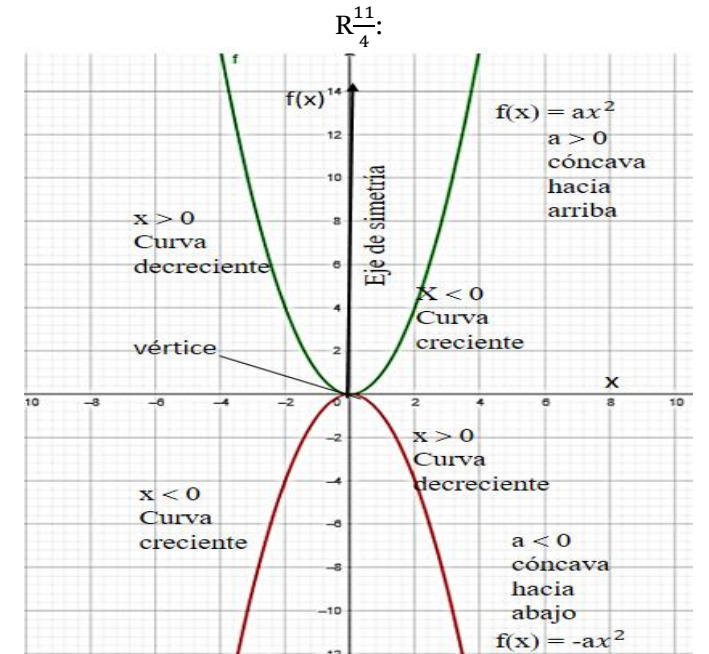


cada número real otro número real”  
(MINEDUC, 2020c, p. 102).  
Función potencia está definida por los  
valores reales, donde a y n son  
números reales distintos de 0 y n es  
distinto de 1 (MINEDUC, 2020c).

$$\mathbb{R}^{\frac{10}{2}}: F(x)=ax^n$$

La función cuadrática es una parábola,  
donde a, b y c son números reales y a  $\neq$   
0 (MINEDUC, 2020c).

$$\mathbb{R}^{\frac{11}{2}}: f(x) = ax^2 + bx + c$$



**Fuente:** elaboración propia, 2020, con base a los textos del estudiante del MINEDUC, 2020a, 2020b, 2020c.

Los registros semióticos permiten comprender lo que es y cómo se representa una función. Por ello, la función tiene que estar representada en sus cuatro formas para que la población estudiantil conozca e identifique las formas en que una función puede representarse, tales como: un enunciado, fórmula o expresión algebraica, una tabla de valores, una gráfica en un plano cartesiano, un diagrama de Venn, entre otras. Todas estas formas son registros semióticos que contienen el concepto, propiedades, componentes y finalidades de una función en la vida



cotidiana. Sin embargo, en la tabla N° 3 se evidencia que, en los textos del estudiante, los conceptos de diferentes tipos de función son presentados con un o dos registros semióticos. Mayormente, una función se presenta de forma algebraica y en el menor de los casos la forma gráfica de una función. Y el registro tabular es olvidado, lo cual oculta la base para construir un registro gráfico de una función.

Por ende, el personal docente al ser el principal encargado de favorecer un aprendizaje que perdure en el tiempo, memoria y en la práctica del estudiante tiene que construir modelos matemáticos de funciones. Estos modelos tienen que contener que es una función, sus propiedades, sus componentes y sus diferentes registros semióticos. Con cada registro semiótico y con la conversión, el estudiante construye un conocimiento y desarrolla habilidades tales como, utilización del concepto de función junto a sus formas, construcción de nuevas formas de llegar a un mismo resultado, análisis y solución de situaciones matemáticas o de la vida cotidiana. También, los modelos tienen que predisponer a que la población estudiantil observe, analice, transforme, intérprete, deduzca y explique cada registro de una función.



- **Los símbolos matemáticos en el tema de funciones:** en el tema de funciones se utilizan diversos símbolos matemáticos. Los símbolos matemáticos contribuyen a la creación y transformación de los registros semióticos (o formas) de una función. Por tal razón, en esta investigación se propone una lista de los símbolos matemáticos que procede del análisis de los textos del MINEDUC (2020a, 2020b, 2020c) en el subnivel Superior.

**Tabla 4**  
*Matriz de símbolos matemáticos en el tema de funciones*

Símbolos	Nombre	Grados de la Educación Básica Superior		
		Octavo grado	Noveno grado	Décimo grado
$\neq$	Diferente a		Sí	Sí
$\in$	Pertenece a		Sí	
$<$	Menor que		Sí	Sí
$>$	Mayor que		Sí	Sí
$\rightarrow$	Implicación		Sí	Sí
$\geq$	Mayor o igual que		Sí	Sí
$:$	Razón/división		Sí	Sí
$\cdot$	Multiplicación		Sí	
$-$	Resta o sustracción	Sí	Sí	Sí
$\times$	Multiplicación			Sí
$/$	División, tal que		Sí	Sí
$=$	Igual a	Sí	Sí	Sí
$+$	Suma o adición	Sí	Sí	Sí
$\infty$	Infinito		Sí	Sí
$\wedge$	Intersección, y, además, también		Sí	
$\sqrt{\quad}$	Radical		Sí	Sí
$\%$	Porcentaje o proporción		Sí	Sí
$\pm$	Más/menos			Sí



$\cup$	Complemento del conjunto		Sí
$\Delta$	Delta o discriminante		Sí
$\alpha$	Alfa		Sí
Z	Números enteros	Sí	
N	Números naturales	Sí	
R	Números reales	Sí	Sí

**Fuente:** elaboración propia, 2020, con base a los textos del MINEDUC, 2020a, 2020b, 2020c.

Como aparece en la tabla N° 4, en el tema de funciones se utilizan diversos tipos de símbolos. Beiza (2015) señala que es necesario distinguir los símbolos en cuatro tipos convencionales: ideogramas, pictogramas, símbolos de puntuación y símbolos alfabéticos. Los ideogramas son los logogramas, los pictogramas son los iconos geométricos, los símbolos de puntuación definen la relación que existe entre un objeto y otro, y los símbolos alfabéticos hacen referencia a las letras del alfabeto latino y alfabeto griego.

Los ideogramas en el tema de funciones son: +, -, x, /, ., ±, <, >, ≥, √, % y ^ . Los pictogramas son ∞ y Δ. Los símbolos de puntuación son: ≠, =, ∈, :, ≥, ∪ y →. Y los símbolos alfabéticos o alfabeto griego son N, Z, R y α . Los símbolos empleados en el tema de funciones son una ventaja y una desventaja para el personal docente y la población estudiantil. La ventaja corresponde a la familiaridad que el personal docente puede ofrecer con el empleo constante en sus clases para que la población estudiantil conozca el significado y la utilidad, pero, sí el personal docente no utiliza, la población estudiantil desconoce los símbolos, la cual es un freno u obstáculo para el aprendizaje.

También, la tabla N° 4 muestra que, en el octavo grado no se emplean muchos símbolos y en el décimo grado se dejan de usar algunos símbolos (R, Z, ±, ∈) del noveno grado y aparecen nuevos símbolos (Δ, α). Por ello, el personal docente debe tener cuidado con los símbolos que utiliza, porque, los símbolos al ser excluidos o

usados una vez generan problemas tanto en el presente como en el futuro.

Posiblemente en un futuro, la población estudiantil tendrá que resolver problemas, casos o desafíos con los símbolos excluidos y el aprendizaje de la población estudiantil será afectado.

- **Ejemplos** abarca el análisis de la secuencia de transformación de los registros semióticos desde problemas resueltos de funciones. Esto se realiza porque la mayoría de la población estudiantil acude a los textos del MINEDUC o al internet, para buscar una o varias maneras de resolver un problema. También, los textos son usados para despejar dudas u orientarse en la resolución de problemas. Los ejemplos que contienen los textos, suelen señalar la manera de cómo resolver los problemas planteados. Por tal razón, se toman ejemplos o problemas explicativos de los textos de trabajo del estudiante de forma aleatoria.

**Problema del octavo grado:** representar gráficamente la relación  $y = x + 2$ .

- **Primer paso de la secuencia de transformación del registro tabular al registro gráfico:** “se elabora una tabla de valores escogiendo los valores que tomará  $x$  y se reemplaza en la función” (MINEDUC, 2020a, p. 227).

x	f(x)
2	$y = 2 + 2 = 4$
1	$y = 1 + 2 = 3$
0	$y = 0 + 2 = 2$
-1	$y = -1 + 2 = 1$
-2	$y = -2 + 2 = 0$

Se completa la tabla

x	f(x)
2	4
1	3
0	2
-1	1
-2	0

Figura 6. Tabla de valores de un problema de octavo grado

Fuente: elaboración propia, 2020, con base al texto del MINEDUC, 2020a.

- **Segundo paso de la secuencia de transformación del registro tabular al registro gráfico:** “los ejes cartesianos nos sirven también para representar gráficamente funciones. Según la función, las coordenadas del plano cartesiano son” (MINEDUC, 2020a, p. 227).

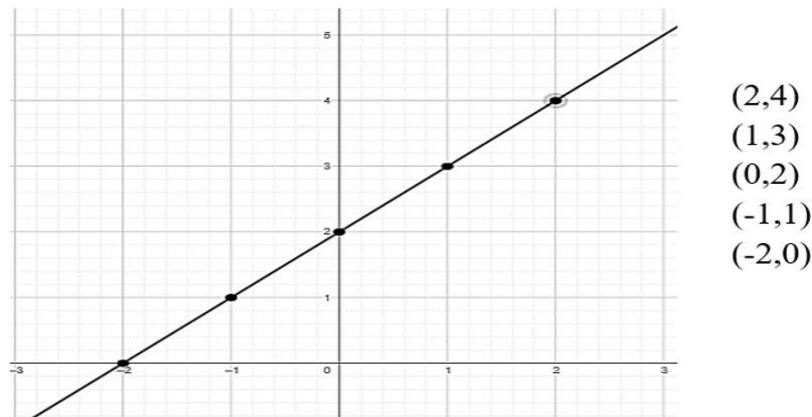


Figura 7. Gráfico de un problema de octavo grado

Fuente: elaboración propia, 2020, con base al texto del MINEDUC, 2020a.

El ejemplo explicativo tomado del texto de octavo grado demuestra que la secuencia de transformación del registro verbal al registro algebraico está incompleto, no se explica a detalle los pasos a seguir en la conversión. Lo que provoca incomprensión o que las dudas del estudiante no sean resueltas. Por ello, en el proceso de enseñanza, el tratamiento de convertir de un registro verbal a un registro gráfico debe ser explicado o reforzado a detalle.

El docente debe explicar que, la construcción de una tabla de valores surge al dar cualquier valor a la variable independiente “x” y ese valor colocar en la fórmula asignada ( $y = x + 2$ ) para que surja el valor de la variable dependiente “y”. Al tener los valores en una tabla, el estudiante tiene que tomar un par de puntos (x, y), y colocar el punto “x” en el eje de las abscisas y el valor de “y” en el eje de las ordenadas del plano cartesiano. Al terminar de colocar todos los pares de puntos se tiene que realizar una recta que una los diversos puntos (opcional) que posibilite obtener la figura N° 7.

En las conversiones de registros semióticos, como la anterior, se tiene que explicar a detalle cuales son los pasos a seguir, para evitar que se generen problemas de comprensión y utilización de las distintas formas de una función. Por ello conviene realizar actividades cognitivas que involucren situaciones de la vida cotidiana para que la población estudiantil analice y convierta los registros semióticos. En el estudio de funciones es fundamental que el personal docente explique con ejemplos cotidianos qué es una función, cuáles son las finalidades, registros, transformaciones y relaciones entre cada representación. A

continuación se presenta un ejemplo explicativo sacado del texto del estudiante de noveno grado.

**Problema del noveno grado:** “obtener y analizar la gráfica de la función  $f(x)=3x-2$ ” (MINEDUC, 2020b, p. 227).

- **Primer paso de la secuencia de transformación del registro algebraico al registro gráfico:** “elaboramos una tabla de valores y graficamos” (MINEDUC, 2020b, p. 227).

$f(x) = 3x - 2$	
x	f(x) o y
-2	-8
4	10

Figura 8. Tabla de valores de un problema de noveno grado

Fuente: elaboración propia, 2020, con base al texto del MINEDUC, 2020b.

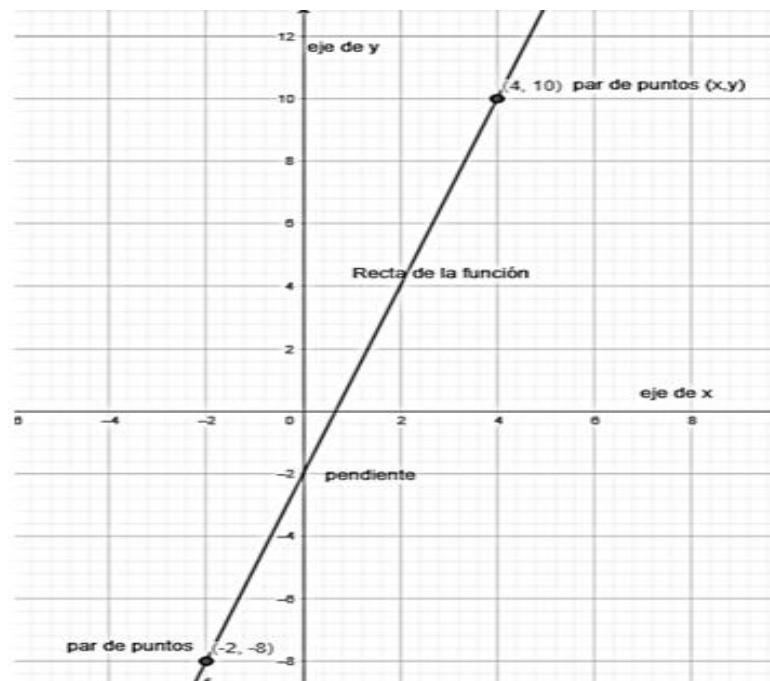


Figura 9. Gráfico de un problema de noveno grado

Fuente: Elaboración propia, 2020, con base al texto del MINEDUC, 2020b.

Desde este ejemplo, se evidencia que algunos pasos para transformar de un registro algebraico a una gráfica fueron excluidos. Un paso importante que al inicio se tenía que

explicar consiste en analizar la función  $f(x) = 3x-2$  y determinar los componentes: la variable independiente ( $x$ ), variable dependiente ( $f(x)$ ) y la pendiente ( $-2$ ). Luego hay que explicar que la construcción de una tabla de valores se debe asignar valores a la variable independiente ( $x$ ) y reemplazar en la operación correspondiente para que surja el valor de la variable dependiente (ver figura 9). Se crean una tabla conformada por dos columnas, una columna para los valores de “ $x$ ” y otra columna para los valores de “ $y$ ”.

$f(x) = 3x-2$ reemplazamos los valores de “ $x$ ” por $-2$ y $4$	
$f(x) = 3(-2) -2$	$f(x) = 3(4) -2$
$f(x) = -6-2$	$f(x) = 12 -2$
$f(x) = -8$	$f(x) = 10$

Figura 10. Resolución de la expresión algebraica

Fuente: elaboración propia, 2020, con base al texto del MINEDUC, 2020b.

También, en el texto se tenía que explicar que para construir un gráfico en el plano cartesiano se toma un par de puntos sea  $(-2, -8)$  o  $(4,10)$  de la tabla de valores y se coloca en el plano cartesiano de acuerdo con los valores. Los valores de  $x$  en el eje de horizontal o eje de las abscisas y los valores de  $f(x)$  en el eje vertical o eje de las ordenadas. Al observar cada paso a seguir en la transformación el estudiante puede resolver los problemas o situaciones que el docente u otro exige.

Pero, como se evidencia en el ejemplo explicativo del noveno grado, el tratamiento de transformación no es completo, carece de algunos pasos indispensables. Lo que dificulta a un estudiante que recién está realizando actividades de conversión de los registros semióticos de una función, es decir, el estudiante no puede consultar o guiarse del texto. A continuación, un ejemplo tomado del texto de décimo grado.

**Problema del décimo grado:** “El lienzo cuadrado de una pintura aumenta los lados paralelos en 7 cm, con lo cual se obtiene un rectángulo. ¿Cuál es el área del rectángulo en función del lado  $x$ ?” (MINEDUC, 2020c, p. 174).



- **Primer paso de la secuencia de transformación del registro verbal al registro gráfico:** “el área del rectángulo:  $A = (x + 7)x$ ;  $A = x^2 + 7x$ ” (MINEDUC, 2020c, p. 174).
- **Segundo paso de la secuencia de transformación del registro verbal al registro gráfico:** con base a la fórmula, “calculamos lo siguiente: El área del rectángulo cuando  $x = 0, 1, 2, 3, 4$  y  $5$ . Elaboramos una tabla” (MINEDUC, 2020c, p. 174).

x(cm)	0	1	2	3	4	5
A(cm <sup>2</sup> )	0	8	18	30	44	60

Figura 11. Tabla de valores de un problema de décimo grado

Fuente: elaboración propia, 2020, con base al texto del MINEDUC, 2020c.

- **Tercer paso de la secuencia de transformación del registro verbal al registro gráfico:** “graficamos los puntos antes encontrados y respondemos” (MINEDUC, 2020c, p. 174).



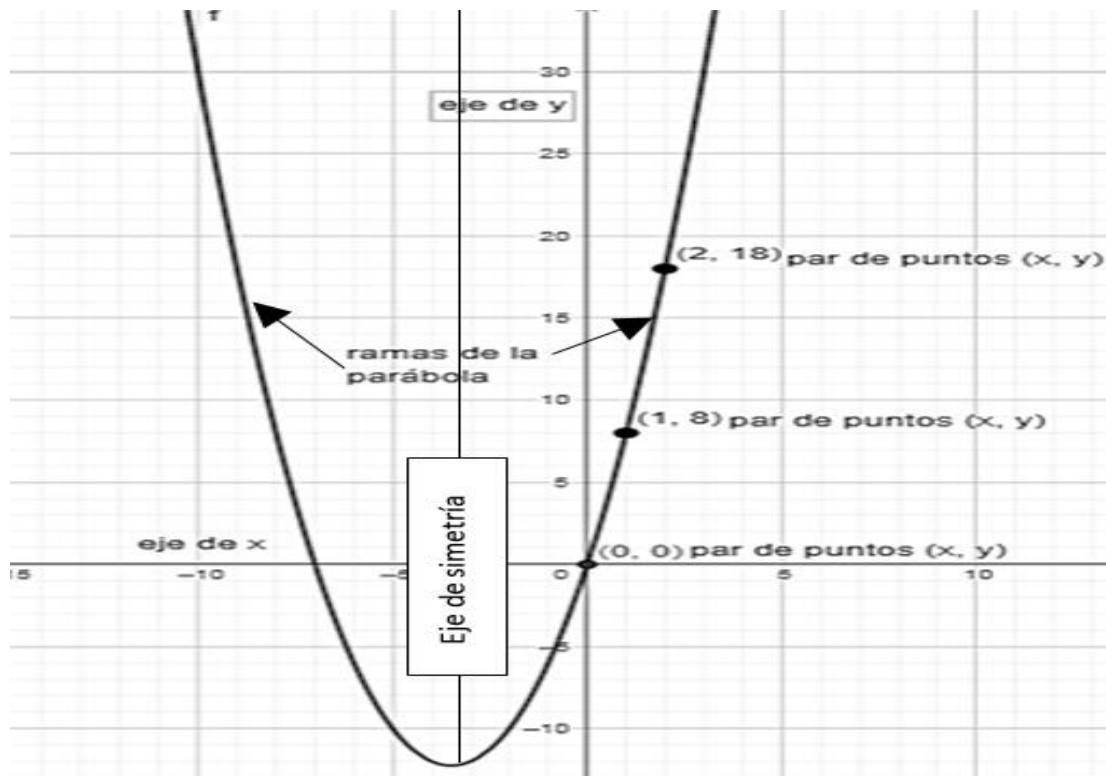


Figura 12. Gráfico de un problema de décimo grado

Fuente: elaboración propia, 2020, con base al texto del MINEDUC, 2020c.

¿Para qué valor de  $x$  el área es  $30 \text{ cm}^2$ ? Para  $x = 3 \text{ cm}$

¿Para qué valor de  $x$  el área es de  $120 \text{ cm}^2$ ? Para  $x = 8 \text{ cm}$  (MINEDUC, 2020c, p. 174)

De acuerdo con el ejemplo extraído del texto del décimo grado, se observa que la secuencia de transformación del registro verbal al registro gráfico está muy completa, es decir, pasa por todos los registros semióticos de una función y explica el tratamiento a seguir en cada registro. Sin embargo, considero que es importante que se aclare que la tabla de valores surge al reemplazar los valores asignados (0, 1, 2, 3, 4, 5) a la fórmula  $x^2+7x$ . Ejemplos como el anterior tiene que estar en los textos del Ministerio de Educación, porque explican el tratamiento a seguir para transformar de un registro a otro. Además, los tratamientos ayudan a que el estudiante desarrolle sus habilidades y capacidades, y descubra nuevas formas de conversión.

- **Taller para la población estudiantil de la Educación Básica Superior:** las actividades que proponen los textos estudiantiles en el tema de funciones son varios talleres, cada taller tiene una destreza que la población estudiantil debe demostrar con el desarrollo o resolución. La tabla N° 5 señala los talleres y problemas que están inmersos en los textos. Además, a la tabla se adicionan las respectivas DCD que el Currículo Nacional establece en el tema de funciones.

**Tabla 5**  
*Actividades propuestas de los textos del 8º, 9º y 10º grado*

Grado	Taller	Problemas	Destreza del taller	Destreza con criterio de desempeño del Currículo Nacional, 2016
Octavo	1	8	M.4.1.44.	M.4.1.44.  M.4.1.47.  M.4.1.51. y M.4.1.48.
Noveno	3	21	<b>Segundo taller:</b> M.4.1.51. y M.4.1.48.  <b>Tercer taller:</b> M.4.1.50. Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología).	“M.4.1.50. Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología), <b>e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente</b> ” (p. <b>883</b> ).  M.4.1.45. y M.4.1.46. M.4.1.48. y M.4.1.49. M.4.1.50.
Décimo	5	51	<b>Primer taller:</b> M.4.1.45. y M.4.1.46. <b>Segundo taller:</b> M.4.1.48. y M.4.1.49. <b>Tercer taller:</b> M.4.1.50. <b>Cuarto taller:</b> M.4.1.51. y M.4.1.52. <b>Quinto taller:</b> M.4.1.57.	M.4.1.51. y M.4.1.52. M.4.1.57.

**Fuente:** elaboración propia, 2020, con base al Currículo Nacional y los textos del MINEDUC, 2016a, 2020a, 2020b, 2020c.

La información contenida en la tabla N° 5 expone que en el octavo grado existe un taller con su debida destreza. Este taller contiene 8 problemas que la población tiene que resolver en el aula o en su casa. En el noveno grado hay tres talleres con varias destrezas y problemas, es decir, la población estudiantil tiene que resolver 6 problemas en el primer y segundo taller, y en el último taller tiene que resolver 9 problemas. Por otra parte, en el décimo grado se evidencia que existen cinco talleres con sus respectivas destrezas y problemas. El total de problemas a resolver son 51, 13 problemas existen en el primer y tercer taller, 6 del segundo taller, 9 del cuarto taller y en el último taller existen 10 ejercicios que la población tiene que resolver para demostrar que la destreza ha sido lograda.

En total en los tres grados (octavo, noveno y décimo) se propone 9 talleres con diez destrezas, donde la destreza M. 4.1. 50 del tercer taller del noveno grado cumple parcialmente con lo que establece el Currículo Nacional (MINEDUC, 2016a). En esta destreza se suprime la parte de identificar la monotonía desde la pendiente o gráfica de una función lineal. De igual manera, en los textos del estudiante se suprime tres DCD que el MINEDUC (2016a) establece para el aprendizaje de funciones en la Educación Básica Superior. Las tres destrezas (M. 4.1. 56, M. 4.1. 58, M. 4.1. 61) se refieren a la resolución y planteamiento de funciones lineales y cuadráticas que involucren modelos, sistema de ecuaciones y uso de las TIC para interpretar y juzgar las soluciones. La evasión de destrezas en los textos del estudiante, principal recurso que utiliza el personal docente para evaluar el desempeño del estudiante, puede significar un problema actual y futuro.

Un problema educativo se refiere a una situación en la que no se está cumpliendo con lo que se estipula en el currículo nacional, es decir, el texto no garantiza que el estudiante se enfrenta a situaciones matemáticas. Y en los próximos años de estudio, la población estudiantil necesitará resolver y crear modelos matemáticos de función lineal o cuadrática. Es por ello, que el personal docente tiene que tener cuidado con las destrezas que no se cumplen y buscar la manera más adecuada de resolver este inconveniente antes que sea demasiado tarde y se perjudique la formación estudiantil y el perfil de salida del bachiller ecuatoriano. Este perfil se refiere a usar y comprender las ideas o conceptos

matemáticos para resolver problemas o modelos matemáticos contruidos con funciones elementales con o sin uso de las tecnológicas (MINEDUC, 2016a).

- **Problemas de conversión propuestos en los talleres:** en los textos del estudiante se analizan los 80 problemas propuestos con el fin de determinar cuáles son los problemas que se refieren a la conversión de registros semióticos de una función. A continuación, los problemas se etiquetan con P.8, P.9 y P.10, por ser de octavo, noveno y décimo grado, respectivamente.

**Tabla 6**  
*Problemas de conversión propuestos en los talleres*

Grado	Registro algebraico	Registro tabular	Registro gráfico	Registro verbal	Ninguno
Taller del 8º	P.8.4 P.8.6	P.8.3 P.8.4 P.8.5 P.8.6 P.8.7	P.8.3 P.8.5 P.8.6 P.8.7		P.8.1 P.8.2 P.8.8
Primer taller del 9º				P1.9.1	P1.9.2 P1.9.4 P1.9.3 P1.9.5 P1.9.6
Segundo taller del 9º		P2.9.3	P2.9.3 P2.9.5		P2.9.1 P2.9.2 P2.9.4 P2.9.6
Tercer taller del 9º	P3.9.1 P3.9.4 P3.9.5	P3.9.1	P3.9.1 P3.9.3 P3.9.8		P3.9.2 P3.9.6 P3.9.7 P3.9.9
Primer taller del 10º	P1.10.10	P1.10.2	P1.10.3		P1.10.1

	P1.10.12	P1.10.7 P1.10.12	P1.10.9 P1.10.11 P1.10.12 P1.10.13	P1.10.4 P1.10.5 P1.10.6 P1.10.8
Segundo taller del 10º		P2.10.2	P2.10.2	P2.10.1 P2.10.4 P2.10.3 P2.10.5 P2.10.6
Tercer taller del 10º		P3.10.3	P3.10.3	P3.10.1 P3.10.2 P3.10.4 P3.10.5 P3.10.6 P3.10.7 P3.10.8 P3.10.9, P3.10.10 P3.10.11 P3.10.12 P3.10.13
Cuarto taller del 10º		P4.10.1 P4.10.2	P4.10.1 P4.10.2 P4.10.6	P4.10.4 P4.10.3 P4.10.5 P4.10.7 P4.10.8 P4.10.9
Quinto taller del 10º			P5.10.3 P5.10.5 P5.10.7 P5.10.10	P5.10.1 P5.10.2 P5.10.4 P5.10.6 P5.10.8 P5.10.9

**Fuente:** elaboración propia, 2020, con base a los textos del MINEDUC, 2020a, 2020b, 2020c.

Como aparece en la tabla N° 6 los problemas de conversión son considerables, 30 de 80. De los cuales, los problemas P1.10.12, P3.9.1 y P.8.6 exigen la conversión de un problema de función, en registro verbal, a sus tres tipos de registros semióticos: algebraica, tabular y gráfica. En los demás problemas se solicitan dos o una conversión de registro semiótico. Desde estos problemas, el personal docente puede hacer que la población estudiantil practique y perfeccione la conversión de una función a los distintos registros semióticos (gráfica, tabular y algebraica). Además, el personal docente puede plantear nuevos ejercicios de conversión para que el aprendizaje de funciones en la población estudiantil perdure en el tiempo, memoria y en la práctica.

#### **4.8 Triangulación de técnicas**

En este tipo de triangulación, según Alzas, Casa, Luengo, Torres y Verissimo (2016) se emplean dos o más métodos y se contrastan los resultados para analizar las coincidencias y diferencias de la información encontrada. En este caso se aplican los dos métodos: analítico e inductivo. Y en cada método contiene técnicas. Por tal razón, se presenta la triangulación de la información obtenida con la aplicación de las técnicas del proyecto. A continuación se presentan las categorías y las respectivas técnicas.

**Tabla 7**  
*Triangulación de las técnicas*

Categoría	Observaciones	Encuesta	Análisis de contenido					
			Currículo	PCI	PCA	PUD	Textos	
Registros semióticos de una función	Estudiantes con problemas de identificación y conversión de los registros semióticos de una función: algebraico y gráfico.	Conocen los registros semióticos de una función	Reconoce los registros semióticos de una función: gráfico y algebraico, a veces el tabular.			Se evidencian dos tipos de registros semióticos de una función: gráfico y algebraico.	Se evidencian dos tipos de registros semióticos de una función: gráfico y algebraico. Se describe las actividades, recursos, técnicas e instrumentos que valoran el desempeño del estudiante	Reconoce los registros semióticos de una función
E-A de funciones	La docente y los estudiantes usan las TIC Actividades grupales	Emplean estrategias y recursos diversos	Incentiva el uso de las TIC y propone orientaciones a los docentes	Se centra en el enfoque constructivista, el estudiante es el protagonista y el docente es guía.		Secuenciada y organizada por unidades	Propone diversas actividades que se relacionan al registro gráfico y expresión algebraica	Describe la definición de una función, ejemplifica y propone actividades
Resolución de actividades o problemas referidas a los registros semióticos de una función	Los estudiantes presentan problemas	Resolución de problemas de funciones, resolución de los problemas en la pizarra con los estudiantes y tarea		Taller, resolución de problemas		Resolver de forma gráfica y analítica con el apoyo de las TIC funciones en situaciones concretas.		Talleres
Software Educativos	GeoGebra	Geogebra y Graph	GeoGebra y Graph	TIC		TIC	GeoGebra y Graph	GeoGebra

Evaluación	Actividades individuales y grupales	Pruebas Sumativa Formativa	Criterio e indicadores del currículo nacional	Sumativa Formativa	Criterio e indicadores del currículo nacional	Sumativa Formativa	Sumativa
------------	-------------------------------------	----------------------------	---	--------------------	---	--------------------	----------

Fuente: elaboración propia, 2020

De acuerdo con la tabla N° 7 se evidencia que los registros semióticos están explícitos en el tema de funciones. Asimismo, los docentes, el PCA, PUD, Currículo Nacional y textos del Ministerio de Educación señalan los registros gráfico y algebraico de una función. En la mayoría de los casos no aluden al registro verbal y al registro tabular, dos registros indispensables para construir y utilizar el concepto de función. Asimismo, los softwares educativos son GeoGebra y Graph, dos recursos importantes para analizar y representar una función a sus cuatro registros semióticos: verbal, tabular, gráfico y expresión algebraica.



## **5. Propuesta del proyecto**

### **5.1 Introducción**

Una estrategia de enseñanza, según Londoño y Calvache (2010) es el conjunto de procedimientos que el personal docente diseña con anterioridad, de acuerdo con las circunstancias, contexto y momentos de acción de la clase. Una estrategia de enseñanza busca que la población estudiantil construya conocimientos y desarrolle habilidades, capacidades y destrezas. Por tal razón, la presente investigación propone una estrategia de enseñanza. La estrategia es diseñada para la enseñanza de la semiótica matemática en el aprendizaje de funciones del subnivel Superior de la Educación Básica. La propuesta determina cómo enseñar funciones para que la población estudiantil aprenda desde el por qué y para qué.

La estrategia de semiótica matemática en el tema de funciones es clave, porque el personal docente de matemáticas debe saber el “qué” y “cómo” enseñar. El “qué” se refiere al concepto, representaciones, registros de representación, los componentes, propiedades y finalidades de una función en la vida académica y social. Y el “cómo” enfatiza a la manera que la semiótica le puede ayudar al docente para que sus estudiantes resuelvan problemas, comprendan, utilicen y conviertan los diferentes registros semióticos de una función, tomando en cuenta los factores contextuales, metodológicos e individuales que influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la comprensión de los conceptos y la comunicación con los demás. A continuación, la figura N° 13 resume la propuesta de investigación.

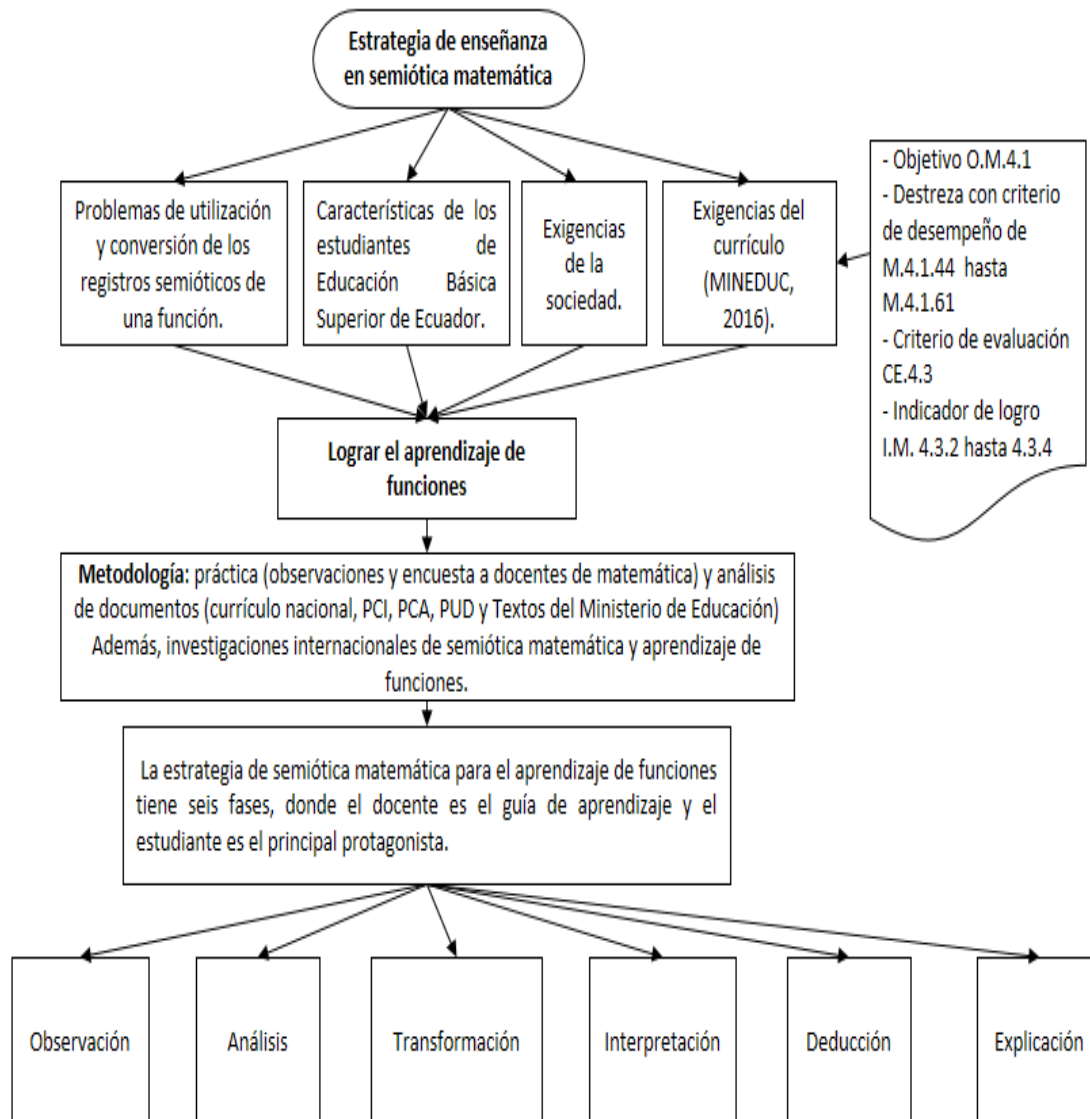


Figura 13. Propuesta de la investigación

Fuente: Elaboración propia, 2020.

## 5.2 Objetivo de la propuesta

- Lograr el aprendizaje de funciones en la población estudiantil del subnivel Superior de la Educación Básica del año lectivo 2021-2022, a través de la estrategia de enseñanza basada en semiótica matemática.

## 5.3 Metodología de la propuesta

La propuesta fue construida con base a los resultados obtenidos en las observaciones y en las encuestas realizadas a los docentes de matemáticas en el tema de funciones. Incluye

los resultados obtenidos desde el análisis de los textos del Ministerio de Educación, Currículo Nacional, PCI, PCA, PUD. Y considera los fundamentos de los registros semióticos de Duval (1999), la jerarquía de comprensión de Van Hiele (1999) y el modelo de resoluciones de problemas de Polya (1945).

En definitiva, la información recopilada en la práctica y en el análisis de los documentos fueron las bases de la propuesta. La propuesta es una estrategia de enseñanza basada en semiótica que contiene seis fases. Las fases son observación, análisis, transformación, interpretación, deducción y explicación del signo matemático en sus distintos registros semióticos. Cada fase posee una corta definición, características, propósitos y preguntas orientativas para que el personal docente aplique a su población estudiantil del subnivel Superior en el tema de funciones. Para realizar todo lo anterior se consultó, los elementos curriculares que plasma el Currículo Nacional en el tema de funciones en la población estudiantil de este subnivel de educación.

#### **5.4 Elementos curriculares de la propuesta**

Los elementos curriculares en el tema de función son: objetivo del área, criterios de desempeño, criterio de evaluación e indicadores de logro del área de Matemáticas de la Educación Básica Superior (MINEDUC, 2016a). Todos estos son elementos claves para la propuesta de investigación.

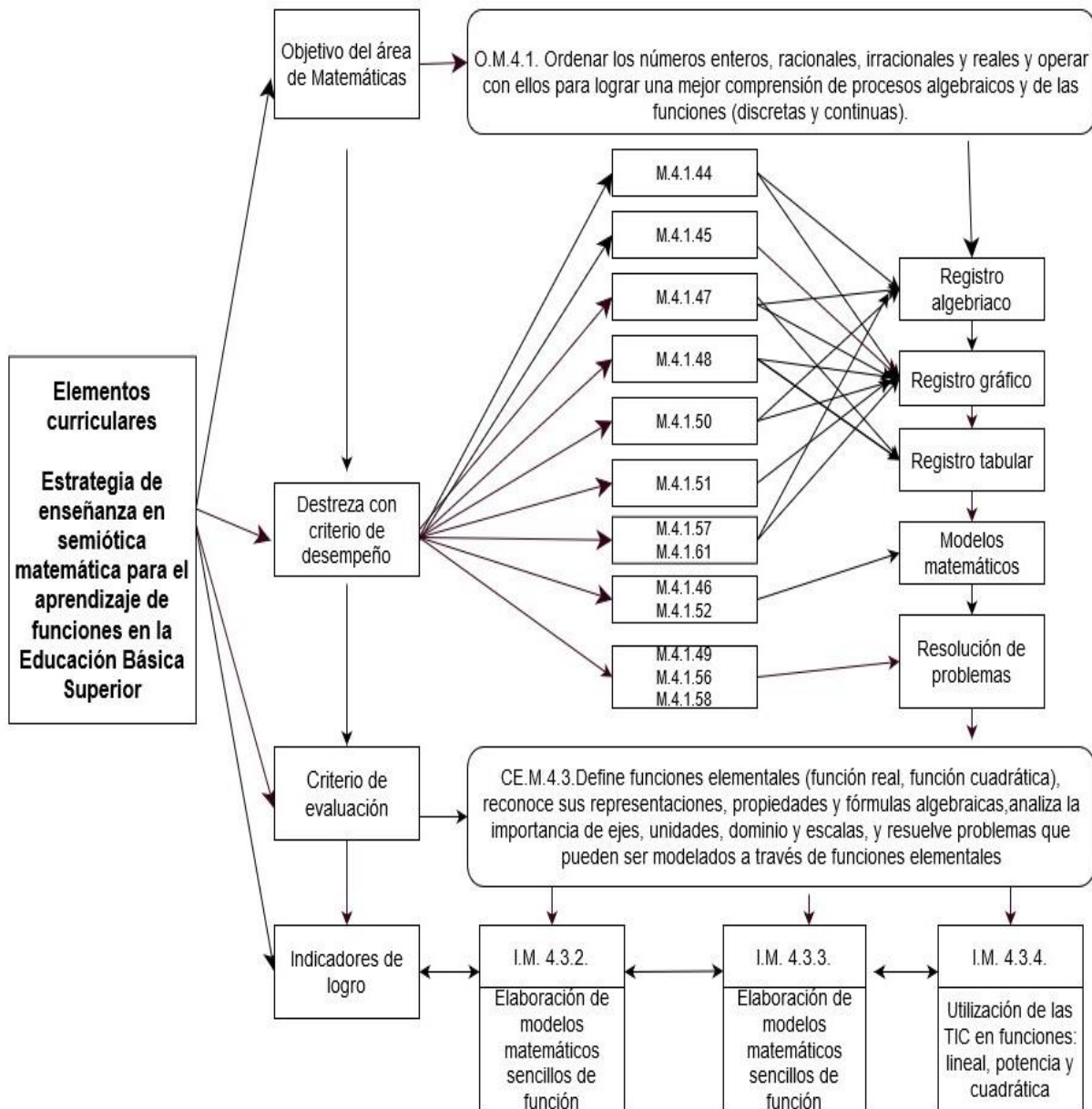


Figura 14. Elementos curriculares de la propuesta

Fuente: elaboración propia, 2020, con base en el Currículo Nacional del MINEDUC, 2016a.

## 5.5 Descripción de la propuesta

La estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones tiene seis fases: observación, análisis, transformación, interpretación, deducción y explicación de una función en sus distintos registros semióticos. En estas seis fases, el personal docente es una guía que puede utilizar el software GeoGebra y la pizarra en línea. Él o ella plantean las preguntas orientativas, crean espacios de diálogo, motivan e invitan a la población estudiantil a reflexionar sobre sus acciones y la utilización de sus capacidades y

habilidades. Las habilidades como formación y utilización del concepto función y sus propiedades; elaboración y construcción de tratamientos heurísticos que el permita convertir de un registro a otro, y análisis y solución de situaciones matemáticas o de la vida cotidiana. También, el personal docente tiene la misión de localizar las principales dificultades de la población estudiantil en el aprendizaje de funciones.

Por otra parte, el aprendizaje de cualquier tema requiere de tres aspectos: motivación, conocimientos previos y experiencia. El personal docente motiva a la población estudiantil a ser el protagonista de su aprendizaje. Cada estudiante tiene que poseer conocimientos previos imprescindibles del manejo del software GeoGebra, operaciones básicas, lenguaje algebraico, factorización, conjuntos, relaciones de orden en el conjunto, operaciones de conjuntos, diagramas, sistema de coordenadas cartesianas y ubicación de los diferentes números en el plano cartesiano. Todo lo anterior son las bases para utilizar, comprender y aprender funciones a través de la experiencia que cada fase de la estrategia le ofrece.

### 5.6 Fases de la propuesta

Las seis fases de la propuesta contienen una definición, características, requerimientos y preguntas orientativas para que el personal docente aplique en sus aulas de clases (presencial o virtual) y la población estudiantil logre el aprendizaje de funciones. Cabe recalcar que, posiblemente, las seis fases requieren dos horas pedagógicas.

- **La observación** es la capacidad que tiene la población estudiantil para visualizar la función en una o varias representaciones semióticas, ya sea de manera superficial o profunda. Generalmente, esta se da a través del sentido de la vista para pasar a la mente, donde el sujeto con su conocimiento previo lo relaciona a la situación actual. Según, Van Hiele (1999) la observación es parte del primer nivel de comprensión, donde el estudiante reconoce el registro semiótico de una función como un todo, no diferencia las propiedades ni los componentes. Identifican formas, pero no las descomponen ni convierte a otra forma.

Una función se puede representar con cuatro registros semióticos: expresión algebraica, verbal, tabular y gráfica (pizarrón, papel o un software como es el de GeoGebra). En cada tipo de registro están los componentes, variables, características y símbolos empleados (Tocto, 2015). Para orientar a sus estudiantes, el docente ha de realizar las preguntas ¿Qué estoy observando?, ¿Alguna vez observé esta forma de representación?, ¿Se relaciona con algo que conozco?, ¿Qué lo distingue?, entre otras. Estas preguntas, según Polya (1945), permiten una primera aproximación al tema y crea el vínculo para pasar al siguiente nivel de comprensión, el análisis.

- **El análisis** es un proceso mental que explora un problema desde un conocimiento previo y razonamiento. Según Van Hiele (1999), el ser humano utiliza el análisis para distinguir y comprobar el funcionamiento de algo. En este caso, el análisis es al registro semiótico de una función a través de las reglas semióticas (sintáctica, pragmática, semántica). El análisis permite distinguir los datos que se disponen, las relaciones que se establecen, entre las propiedades y componentes de la representación. La función puede estar representada desde los registros de representación (tabular, gráfica, verbal o expresión algebraica), los componentes (dominio, recorrido, rango, imagen, pendiente, simetría, directriz, entre otros). Y las propiedades de la función determinan que todos los componentes del dominio se relacionan con los elementos del rango y cada elemento de la variable dependiente le corresponde un único elemento de la variable independiente.

Un análisis exhaustivo verifica el tipo de registro semiótico de la función y lo relaciona con sus componentes, propiedades, finalidades, contexto del aprendizaje y las exigencias o reglas sociales que ha de cumplirse en la actividad. En el proceso de análisis se recomienda al personal docente aplicar las siguientes preguntas a sus estudiantes: ¿Cuál es el registro o forma de representación?, ¿Cuáles son los componentes de una función?, ¿Cuáles son las propiedades de una función?, ¿Están todos los datos para comprender el problema?, ¿Cuál es la finalidad del problema?, ¿Está relacionado el problema a algo de la vida o contexto? Todas las preguntas



anteriores son aplicadas para ayudar a que la población estudiantil conozca mejor una función (tipo de registro semiótico, componentes, propiedades y datos proporcionados para lograr el acceso a los principios más elementales). Lograrlo significa el paso al tercer nivel de comprensión del aprendizaje de funciones, la transformación.

- **La transformación** es la capacidad que tiene la población estudiantil para convertir el registro semiótico de una función a sus diferentes registros semióticos. Los registros son cuatro: expresión algebraica, tabular, gráfica y verbal. Estos registros para convertirse dependen de las reglas de transformación y las reglas sociales o exigencias de los demás. Las reglas de transformación son dos: elección del registro y los tratamientos de conversión, donde cada transformación tiene un tratamiento y condiciones internos y externas que hacen que el problema o desafío sea único y diferente a los demás. Por ello, la población estudiantil tiene que tener mucho cuidado con cada paso que realiza en la transformación.

En el proceso de transformación, el estudiante ya conoce mejor una función y el razonamiento lógico está en desarrollo. Van Hiele (1999) lo denomina a esta fase abstracción, cuyo fin es descubrir y demostrar las propiedades de una función que fueron descubiertas en el análisis respectivo. El personal docente tiene que ser una guía que plantee las siguientes preguntas: ¿Qué se observa?, ¿Si cambiamos de registro se mantiene nuestras ideas? ¿Se está cumpliendo con los requisitos?, ¿Esta es la forma más adecuada de transformar este signo matemático?, ¿Existe otra manera de presentar la función?, Todo lo anterior se realiza para que la población estudiantil transforme adecuadamente el registro semiótico de una función y el aprendizaje adquiera comprensión para que se perdure en el tiempo, espacio y memoria de cada estudiante. Enfatizando que la transformación de los registros semióticos de una función es heterogéneas y multimodales que cambian y se complementan unas con otras.



- **La interpretación** es un proceso que se realiza para explicar o generar una idea que posea validez y comprensión de un hecho. Una idea surge tras analizar los factores internos y externos, los factores internos son: el tipo de signo, las reglas de transformación y la estructura de significados. Y los factores externos son: la cultura, el contexto donde se produce la comunicación y las exigencias del currículo y la sociedad. En el proceso de interpretación, la población estudiantil tiene que dar un sentido, uso y finalidad a una función de acuerdo con las acciones de las fases anteriores. Esto lo puede lograr gracias a la contestación de las siguientes interrogantes: ¿Qué es y cómo es el signo función?, ¿Cuál es la relación que existe entre las representaciones del signo función?, ¿Cuáles son las reglas de transformación y cómo afectan al signo función?, ¿Qué significa esto?, ¿Qué factores intervienen?, ¿Cuáles son los argumentos de la idea? Las anteriores preguntas están basadas en el modelo de Polya (1945) para orientar a la población estudiantil en cada proceso que realiza. Lograrlo significa que está preparada para la siguiente fase, la deducción.
- **La deducción** es un proceso que surge de las actividades mentales, tales como: la observación, análisis, comparación y transformación del objeto. Estas actividades crean un pensamiento lógico y razonable que validan la confiabilidad de este. La deducción determina que el signo matemático función tiene un concepto parcial, propiedades, componentes, características, tratamientos y reglas por cumplir para llegar a los diferentes tipos de registros semióticos o representaciones. El personal docente para lograr que su población estudiantil logre deducir tiene que plantear las siguientes interrogantes ¿Cuál es la interpretación que se da al signo función?, ¿Cuáles son los componentes?, ¿Cuáles son los factores que influyen en la comprensión del signo?, ¿Qué funcionalidades cumple el signo en la vida?, ¿Que produce la transformación de un registro a otro? Si la población estudiantil contesta estas o más preguntas relacionadas a la deducción con un argumento sólido de





validez, significa que está preparado para la siguiente fase, la explicación (Van Hiele, 1999).

- **La explicación** es la capacidad de la población estudiantil para exponer sus ideas desde argumentos, es decir, cada decisión o acción tiene una justificación (razones y motivos que guiaron a hacer o decir algo). En el tema de funciones, la población estudiantil tiene que explicar desde un razonamiento matemático las ideas que validan sus acciones y decisiones para que el resto de los compañeros u otros aprueben dicha explicación. Para ello, la población estudiantil puede orientarse desde las siguientes preguntas ¿Cumple con los requisitos y condiciones de una función?, ¿Comprenderá la otra persona nuestra posición?, ¿Está contextualizada la idea?

El éxito de la propuesta es reflejado cuando la población estudiantil desarrolla cada etapa de manera adecuada y logra el aprendizaje de funciones. Por ello, la población estudiantil tiene que transitar por cada nivel para comprender y aprender funciones, porque, los niveles permiten indagar a detalle “lo que se quiere decir con ellos, cómo y cuándo se deben utilizar para la eficaz comprensión de lo que se quiera decir” (Beiza, 2015, p.8).

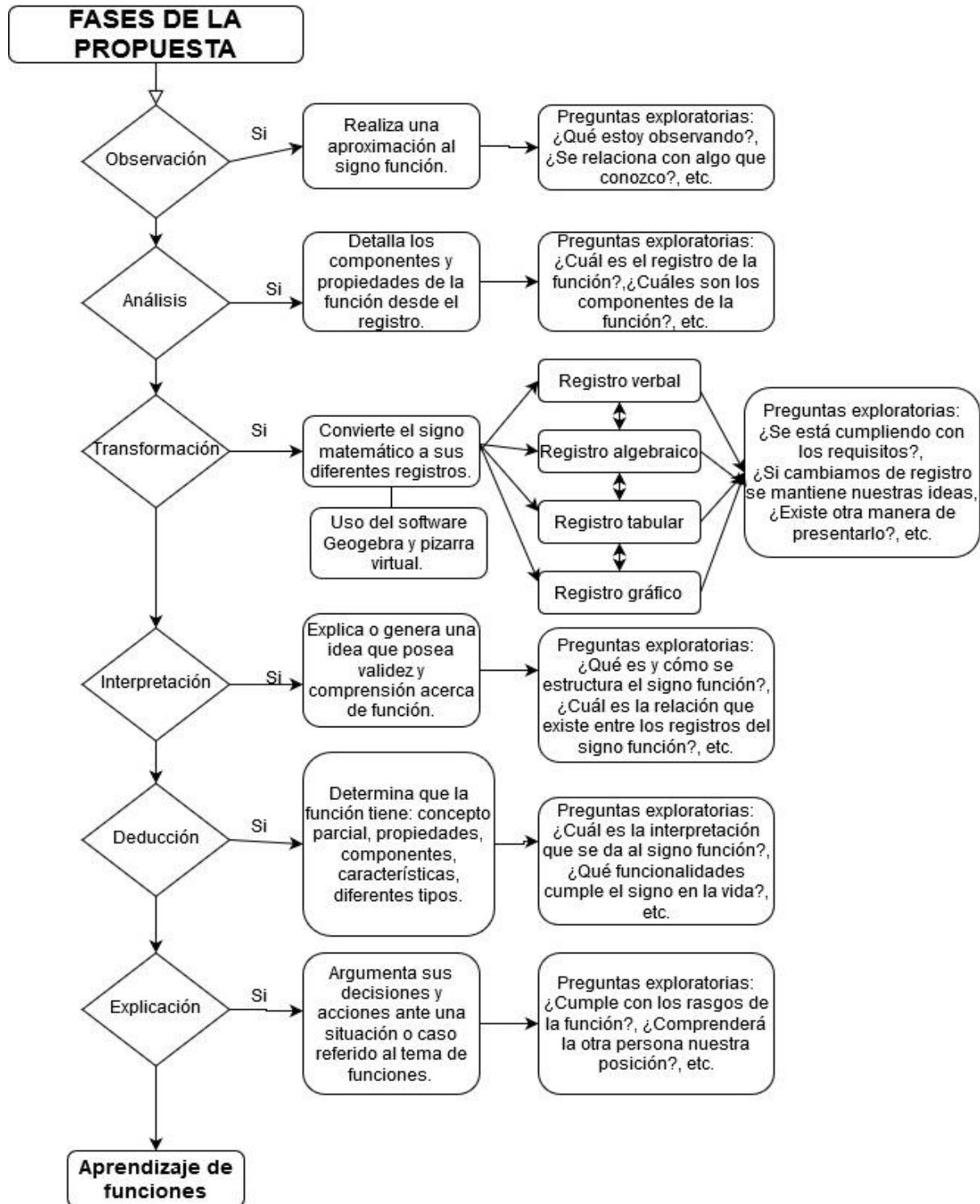


Figura 15. Fases de la propuesta

Fuente: elaboración propia, 2020.



## 6. Conclusiones y recomendaciones

El aprendizaje de funciones, tema de investigación, responde a una gran necesidad en el contexto ecuatoriano. Su importancia es evidente desde el punto de vista educativo, cuando el Currículo Nacional incluye trece Destrezas con Criterio de Desempeño que ha desarrollarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ello, la estrategia de enseñanza que se propone es bastante fácil de implementar tanto en las clases virtuales como presenciales. Además, la propuesta considera todos los requerimientos y principios curriculares establecidos por la NCTM, para que cada estudiante a través de prácticas matemáticas construya conocimientos y desarrolle habilidades y capacidades.

El objetivo general de la investigación, “Proponer una estrategia de enseñanza basada en semiótica que contribuya al aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación Básica del Ecuador,” se cumplió en el quinto apartado. Es importante mencionar que, la propuesta es adaptable, interactiva y reflexiva. Como era de esperarse, aunque la ambiciosa pregunta de investigación fue parcialmente respondida, esta investigación es un aporte de gran utilidad. Además de la dificultad esperada, dada la gran complejidad del tema, la implementación de la propuesta no se pudo realizar totalmente por la situación de la pandemia de enfermedad 2019-2020; por ello, en investigaciones futuras se pretende aplicar la propuesta en una institución educativa para poder medir el impacto que provoca en el aprendizaje de funciones en la población estudiantil del subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador. Sin embargo, la utilidad de la propuesta es evidente.

Se logró cumplir con los cuatro objetivos específicos planteados. El primero era fundamentar teóricamente la semiótica matemática en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones, que se cumplió en el segundo apartado. Pese a la pandemia, este objetivo se logró gracias a una investigación previa y a los materiales disponibles en línea.

El segundo objetivo específico correspondía al diagnóstico del tema desde una perspectiva práctica, que se cumplió al observar las clases de funciones y al aplicar una encuesta a docentes de matemáticas sobre la enseñanza de funciones matemáticas. El diagnóstico contribuyó a comprender la situación, a conocer las estrategias de enseñanza,



recursos, las formas que utilizan para representar y convertir funciones, y la forma de evaluación al estudiante en el tema. Por supuesto, es deseable aumentar el número de encuestas para tener una visión más detallada y precisa.

El tercer objetivo era diagnosticar la presentación de la semiótica matemática en el tema de funciones a través del análisis de varios documentos, que se cumplió en el cuarto apartado. El análisis del Currículo Nacional exhibió la semiótica porque existieron varios DCD referidos a la función y sus diferentes formas de representación. En el análisis del PCI se evidenciaron que algunas DCD del Currículo Nacional se excluyeron. En el PCA y PUD, el análisis expuso a detalle los procesos a seguir para que cada estudiante comprenda una función desde distintas maneras, y en los textos del MINEDUC se encontraron conceptos, ejemplos explicativos y 30 problemas propuestos de conversión de funciones. En definitiva, en cada uno de los documentos analizados se encontró la semiótica matemática, porque esta interviene en las acciones y tareas propuestas en el tema de funciones.

Finalmente, el cuarto objetivo específico de la investigación fue el diseño de una propuesta con base en semiótica matemática para enseñar el tema de funciones. La cual se describe a detalle en el quinto apartado. Por supuesto, esta propuesta deberá crecer y adaptarse a las situaciones de la clase para lograr un impacto y mejora al aprendizaje. El tema puede ser tan extenso que es deseable editar un libro completo o crear un software o programa que cumpla con todos los requerimientos educativos, considere los factores influyentes y responda a las necesidades de la población estudiantil. En resumen, todos los objetivos propuestos fueron cumplidos a lo largo de la investigación.

La investigación realizada demuestra que el aspecto semiótico es desarrollable e ineludible en el tema de funciones. Además, este estudio puede ser una base para realizar otras investigaciones, como por ejemplo en el área de geometría que utiliza varias representaciones (registros semióticos o formas) para definir un concepto matemático, que está construido según principios, reglas y factores que definen una determinada representación.



Todas las acciones o decisiones han de ser dirigidas a mejorar la calidad educativa y facilitar la vida de cada estudiante a través de la praxis matemática y como dicen Paul Halmos en su frase “La única forma de aprender matemáticas es hacer matemáticas”. Por ello, nosotros como docentes de matemáticas hemos de capacitarnos continuamente para seguir facilitando las estrategias y recursos necesarios para que cada estudiante sea el protagonista de su aprendizaje y al comenzar el estudio de las matemáticas sea con minuicidad y termine con magnificencia. Esto quiere decir que la labor docente ha de valorarse, considerando que en los tiempos actuales el rol es más demandante, pero que vale la pena realizar como un aporte a la sociedad. Como dijo Simeon Poisson:

“La vida es buena por solo dos cosas, descubrir y enseñar Matemáticas”.



### **7. Limitaciones de la investigación**

- Las investigaciones de semiótica en el área de Matemática son pocas en comparación con la lingüística.
- La falta de investigaciones nacionales que aborde la semiótica matemática en el aula.
- La situación de la pandemia de enfermedad COVID-2019 impide a la puesta en práctica de la propuesta de investigación a un grupo de estudiantes pertenecientes al subnivel Superior de la Educación Básica del Ecuador.



## **8. Futuras líneas de investigación**

De acuerdo con el trabajo de investigación, las futuras líneas de investigación son:

- Los registros semióticos que prevalecen en el aprendizaje de funciones.
- Estudio comparativo entre dos grupos: experimental y de control.
- Percepciones de los docentes matemáticos con respecto a la semiótica: ventajas y desventajas.
- Aplicación de la propuesta de investigación en dos novenos de EGB de dos unidades educativas del Ecuador.



## 9. Referencias bibliográficas

- Alzas, T., Casa, L., Luengo, R., Torres, J. y Verissimo, S. (2016). Revisión metodológica de la triangulación como estrategia de investigación. *Investigación Cualitativa en Ciencias Sociales*, 3, 639-648.
- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 135-149.  
Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1020033>
- Barallobres, G. (2016). Diferentes interpretaciones de las dificultades de aprendizaje en Matemática. *Revista Matemática*, 28(1), 39-68. Disponible en: <http://somidem.com.mx/descargas/Vol28-1-2.pdf>
- Barrera, H., Barragán, T. y Ortega, G. (2017). La realidad educativa ecuatoriana desde una perspectiva docente. *Revista Iberoamericana de Educación*, 75(2), 9-20.  
Disponible en: <https://rieoei.org/RIE/article/view/2629/3612>
- Beiza, J. (2015). *Semiótica en la comprensión del lenguaje matemático* (Tesis de maestría). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Carabobo, Venezuela.
- Bernal, C. (2010). *Metodología de la investigación administración, economía, humanidades y ciencias sociales*. Colombia: Pearson Educación.
- Campo, G. y Lule, N. (2012). La observación, un método para el estudio de la realidad. *Revista Xihmai*, 7(13), 45-60.
- Ceron, U. (2019). *Aplicación del software GeoGebra en el desarrollo de capacidades matemáticas en los estudiantes del quinto año de secundaria de la Institución Educativa Annie's School-San Juan de Miraflores-2015* (Tesis de licenciatura).





Disponible en:

<http://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/3684/TM%20CE-Dg%204700%20C1%20-%20Ceron%20Solorzano%20Ulices%20.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Constitución de la República de Ecuador. (2008). Artículo, 26. Montecristi, Ecuador.

Disponible en: [https://www.oas.org/juridico/pdfs/mesicic4\\_ecu\\_const.pdf](https://www.oas.org/juridico/pdfs/mesicic4_ecu_const.pdf)

D'Amore, B. y Radford, L. (2017). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Disponible en:

<https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2017/07/D-Amore-y-Radford-LIBRO-PDF-2017.pdf>

D'Amore, B., Fandiño, M. e Iori, M. (2013). *La Semiótica en la didáctica de la Matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Díaz, C. (2019). *Análisis de registros de representación semiótica en la aplicación de la ingeniería basada en el diseño (ibd) como metodología de la investigación, para la enseñanza de la conceptualización y formalización de la noción del límite, mediante un entorno virtual de aprendizaje* (Tesis de maestría). Disponible en:

<http://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/16074/1/T-ESPE-038630.pdf>

Díaz, J. (2013). El concepto de función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El cálculo y su enseñanza*, 4, 13-25. Disponible en:

[https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf](https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf)

Distéfano, M., Aznar, M. y Pochulu, M. (2016). Prácticas matemáticas y funciones semióticas en la significación de representaciones simbólicas de la matemática



superior. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 11(2), 1-15.

Distéfano, M., Aznar, M. y Pochulu, M. (2019). Caracterización de procesos de significación de símbolos matemáticos en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 31(1), 144-175.

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Cali, Colombia: Merlín.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (febrero, 2012). *Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica*. En U, Malaspina, VI Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Eco, U. (2000). *Tratado de Semiótica General*. Traducción Carlos Manzano (Quinta edición). Disponible en: <http://mastor.cl/blog/wp-content/uploads/2015/08/ECO-Tratado-de-Semi%C3%B3tica-General.pdf>

Efstathios, S. (2020). *¿Quiénes son los Pobres Ecuatorianos por Ingresos? Una mirada a través de la educación*. Disponible en: [http://indteca.com/omp/index.php/Coleccion\\_Indtec/catalog/view/8/7/31-1](http://indteca.com/omp/index.php/Coleccion_Indtec/catalog/view/8/7/31-1)

Ernest, P. (2008). Towards a semiotics of mathematical text (part 2). *For the Learning of Mathematics*, 28(3), 39-47. Disponible en: <https://flm-journal.org/Articles/150A7CoF2126E8199BF41808B55017.pdf>



- Fernández, F. (2002). El análisis de contenido como ayuda metodológica para la investigación. *Revista de Ciencias Sociales*, 2(96), 35-53. Disponible en: <https://www.redalyc.org/pdf/153/15309604.pdf>
- Fernández, M. (2005). Los nuevos Principios y Estándares del NTSC en castellano. *Revista SUMA*, 48, 105-112. Disponible en: <https://revistasuma.es/IMG/pdf/48/105-112.pdf>
- Gil, J., Morales, M. y Meza, J. (2017). La evaluación educativa como proceso histórico social. Perspectivas para el mejoramiento de la calidad de los sistemas educativos. *Universidad y Sociedad*, 9(3), 162-167. Disponible en: <http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v9n4/rus22417.pdf>
- Ginsberg, D. (2015). *Multimodal semiotics of Mathematics teaching and learning* (Tesis de doctorado). Disponible en: [https://repository.library.georgetown.edu/bitstream/handle/10822/1029900/Ginsberg\\_georgetown\\_0076D\\_13110.pdf;sequence=1](https://repository.library.georgetown.edu/bitstream/handle/10822/1029900/Ginsberg_georgetown_0076D_13110.pdf;sequence=1)
- González, G. (2011). *Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática* (Tesis de maestría). Disponible en: [http://repositorio.autonoma.edu.co/xmlui/bitstream/handle/11182/162/Tratami\\_representa\\_semi%c3%b3ticas\\_funciones\\_cuadr%c3%aaticas.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.autonoma.edu.co/xmlui/bitstream/handle/11182/162/Tratami_representa_semi%c3%b3ticas_funciones_cuadr%c3%aaticas.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Güemes, M., Ceñal, M. e Hidalgo, M. (2017). Desarrollo durante la adolescencia. Aspectos físicos, psicológicos y sociales. *Pediatr Integral*, 21(4), 233-244.
- Iori, M. (2014). Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario. In C. J. Mosquera Suárez (Ed.), *Miradas contemporáneas en educación: Algunos puntos*



clave para el debate (pp. 27-44). Chia (Colombia): Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Jornet, J., González, J. y Sánchez, P. (2014). Factores contextuales que influyen en el desempeño docente. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 7(2), 185-195.

Kohler, J. (2005). Importancia de las estrategias de enseñanza y el plan curricular. *Liberabit*, 11(11), 25-34. Disponible en: [http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1729-48272005000100004&lng=pt&tlng=es](http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1729-48272005000100004&lng=pt&tlng=es)

Leyva, H, Pérez, M. y Pérez, S. (2018). Google Forms en la evaluación diagnóstica como apoyo en las actividades docentes. Caso con estudiantes de la Licenciatura en Turismo. *Ride*, 9(17). Disponible en: <http://www.scielo.org.mx/pdf/ride/v9n17/2007-7467-ride-9-17-84.pdf>

Londoño, P. y Calvache, J. (2010). Las estrategias de enseñanza: aproximación teórico-conceptual. En F. Vásquez. (Ed.), *Estrategias de enseñanza. Investigaciones sobre didáctica en instituciones educativas de la ciudad de Pasto* (p. 11-33). Bogotá: Kimpress Ltda.

Marqués, P. (2012). Impacto de las TIC en la educación: funciones y limitaciones. *Revista de Investigación*, 1-15. Disponible en: <https://www.3ciencias.com/wp-content/uploads/2013/01/impacto-de-las-tic.pdf>

Ministerio de Educación. (2011). *Ley Orgánica de Educación Intercultural*. Disponible en: [https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2017/02/Ley\\_Organica\\_de\\_Educacion\\_Intercultural\\_LOEI\\_codificado.pdf](https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2017/02/Ley_Organica_de_Educacion_Intercultural_LOEI_codificado.pdf)



Ministerio de Educación. (2016a). *Currículo de los niveles de Educación Obligatoria*.

Disponible en:

[https://www.academia.edu/27681357/CURR%C3%8DCULO\\_DE\\_LOS\\_NIVELES\\_DE\\_EDUCACION\\_OBLIGATORIA](https://www.academia.edu/27681357/CURR%C3%8DCULO_DE_LOS_NIVELES_DE_EDUCACION_OBLIGATORIA)

Ministerio de Educación. (2016b). *Acuerdo Ministerial Nro. MINEDUC-ME-2016-*

*00020-A*. Disponible en: <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2017/02/Acuerdo-Ministerial-Nro.-MINEDUC-ME-2016-00020-A.pdf>

Ministerio de Educación. (2020a). *Matemática 8. Texto del estudiante*. Quito, Ecuador:

Maya Ediciones Cía. Ltda. Disponible en: <https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/8egb-Mat-F2.pdf>

Ministerio de Educación. (2020b). *Matemática 9. Texto del estudiante*. Quito, Ecuador:

Maya Ediciones Cía. Ltda. Disponible en: <https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/9egb-Mat-F2.pdf>

Ministerio de Educación. (2020c). *Matemática 10. Texto del estudiante*. Quito, Ecuador:

Maya Ediciones Cía. Ltda. Disponible en: <https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/10egb-Len-Mat-EESS-CCNN-F1.pdf>

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaque, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-

36. <https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112>

Pamplona, J., Cuesta, J. y Cano, V. (2019). Estrategias de enseñanza del docente en las áreas básicas: una mirada al aprendizaje escolar. *Revista Eleuthera*, 21, 13-33.

Disponible en: <http://www.scielo.org.co/pdf/eleut/v21/2011-4532-eleut-21-00013.pdf>



- Panizza, M. (2018). *Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos*. Disponible en: [https://ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/sites/5/2018/12/EBOOK\\_PANIZZA.pdf](https://ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/sites/5/2018/12/EBOOK_PANIZZA.pdf)
- Poyla, G. (1945). *How to solve it. A new Aspect of Mathematical Method*. Universidad de Princeton.
- Punina, W. y Burbano, J. (2017). *Análisis del currículo 2010 y currículo 2016 en la asignatura de estudios sociales de educación general básica superior en el sistema educativo ecuatoriano* (Tesis de pregrado). Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador.
- Rivera, M. y Díaz, H. (2001). *Factores metodológicos que influyen en la adaptación de bases de razonamiento lógico-matemático en los alumnos(as) de tercer ciclo de educación básica* (Tesis de pregrado). Universidad Francisco Gavidia. San Salvador, El Salvador.
- Hernández, R., Fernández, C, y Baptista. P. (2010). *Metodología de la investigación*. (Quinta edición). Disponible en: [https://www.esup.edu.pe/descargas/dep\\_investigacion/Metodologia%20de%20a%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf](https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20a%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf)
- Sánchez, J. y Escotto, E. (Comp.) (2018). *Recursos semióticos en la enseñanza de la Matemáticas*. Disponible en: [https://www.zaragoza.unam.mx/wp-content/Portal2015/publicaciones/libros/Recursos\\_Semioticos.pdf](https://www.zaragoza.unam.mx/wp-content/Portal2015/publicaciones/libros/Recursos_Semioticos.pdf)
- Tocto, E. (2015). *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria* (Tesis de Maestría). Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.



Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310-316.

Zecchetto, V. (2002). *La danza de los signos. Nociones de semiótica general*. Disponible

en:

[https://digitalrepository.unm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1003&context=ab\\_ya\\_yala](https://digitalrepository.unm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1003&context=ab_ya_yala)



## 10. Anexos

### Anexo 1: Guía de observación

La presente guía de observación es utilizada como un instrumento de apoyo a la técnica de observación que indaga el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas en el aula de clases.

<b>Item</b>	<b>SI- NO</b>	<b>Observación</b>
Las actividades que se realizan en el proceso educativo favorecen el aprendizaje de funciones.		
La población estudiantil conoce los diferentes registros de la función.		
La docente del aula emplea estrategias, técnicas y recursos en el aprendizaje de función.		
La docente conoce los beneficios de la semiótica matemática en el aula de clases.		
Se realiza un seguimiento a los estudiantes que presentan dificultades en el proceso educativo.		
La docente promueve la meta cognición y reflexión en los estudiantes		
La población estudiantil tiene bases para abordar el tema de funciones.		
La población estudiantil resuelve las actividades propuestas sin ninguna dificultad.		





## Anexo 2: Guía de observación en el aula

La presente guía de observación es utilizada como un instrumento de apoyo a la técnica de observación que indaga el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas en el aula de clases.

Item	Si - No	Observación
Las actividades que se realizan en el proceso educativo favorecen el aprendizaje de funciones.		
La población estudiantil conoce los diferentes registros de la función.	Sí	La población conoce que existe una tabla de valores, gráfica, expresión algebraica y un enunciado. Pero, desconocen que estos son registros semióticos de una función.
La docente del aula emplea estrategias, técnicas y recursos en el aprendizaje de función.		Para este tema la docente lleva a los estudiantes al laboratorio de informática de la institución educativa. El laboratorio tiene computadoras con el software GeoGebra instalado. Se observa que existen estudiantes que tienen dificultad con el manejo de este software.
La docente conoce los beneficios de la semiótica matemática en el aula de clases.	No	La docente desconoce el significado de semiótica matemática. Es por ello, que se explica en qué consiste este estudio.
Se realiza un seguimiento a los estudiantes que presentan dificultades en el proceso educativo.	Sí	La docente conoce a todos los estudiantes, por tal razón, conoce quién necesita más ayuda en las actividades que se realizan en el aula de clases.
La docente promueve la meta cognición y reflexión en los estudiantes		
La población estudiantil tiene bases para abordar el tema de funciones.	No	Existen vacíos en algunos temas que son bases claves para el tema de funciones. Los estudiantes desconocen que es una perpendicular,



La población estudiantil resuelve las actividades propuestas sin ninguna dificultad.	No	La mayoría de los estudiantes presentan dificultad al momento de realizar actividades de forma independiente.
--	----	---



### Anexo 3: Encuesta

Apreciado/a docente:

Esta encuesta tiene como objetivo recopilar información, desde una perspectiva práctica, sobre el tema de funciones en relación con sus representaciones. Esta información será confidencial (solo la manejare yo) y crucial para la mejora de la enseñanza. Mil gracias por su colaboración.

1. ¿Cuándo usted enseña funciones que estrategia sigue?

\_\_\_\_\_

2. ¿Cuándo usted enseña funciones que recurso tecnológico utiliza?

\_\_\_\_\_

3. ¿De cuántas maneras se puede representar una función, a parte de la manera algebraica?

\_\_\_\_\_

4. ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar una función?

\_\_\_\_\_

5. En una función ¿usted utiliza la representación gráfica?

SI \_\_\_ NO \_\_\_

6. Para representar una función ¿Usted formula una expresión algebraica?

SI \_\_\_ NO \_\_\_

7. Para representar una función, ¿Usted formula un enunciado en lenguaje común?

SI \_\_\_ NO \_\_\_

8. En una función ¿Usted utiliza la representación en una tabla de valores?

SI \_\_\_ NO \_\_\_

9. Cuando a usted le presenta una función desde una representación gráfica ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar la misma función a una tabla de valores?

\_\_\_\_\_

10. Cuando a usted le presenta una función desde una tabla de valores, ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a una expresión algebraica?



---

**11.** Cuando a usted le presenta una función desde una representación algebraica o fórmula, ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a una gráfica?

---

**12.** Cuando a usted le presenta un enunciado de una función ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a una expresión algebraica?

---

**13.** Cuando a usted le presenta un gráfico de una función ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a un enunciado?

---

**14.** Cuando a usted le presenta una tabla de valores de una función ¿Cuáles son los pasos que sigue para representar a un enunciado?

---

**15.** ¿Cuándo usted enseña funciones, cómo evalúa al estudiante?

---

**16.** De acuerdo a todo lo anterior, Usted considera que es necesario realizar un estudio de las diferentes representaciones y conversiones de la función para favorecer el aprendizaje de los estudiantes de la Educación General Básica del Ecuador

---



#### Anexo 4: Rúbrica para el análisis del PCI

<b>Indicador</b>	<b>Objetivo</b>
Enfoque	Presenta y describe el enfoque pedagógico
Contenidos de aprendizaje	Determina los objetivos y las DCD que se va a abordar para garantizar el aprendizaje de funciones.
Metodología	Define los métodos y técnicas de trabajo para el cumplimiento de DCD.
Evaluación	Establece el criterio de evaluación del tema de funciones.
Planificación	Define cuales son las planificaciones (PCA, PUD) del tema de funciones.



**Anexo 5: Matriz de revisión de PCA**

<b>Grado</b>	<b>Objetivo del curso</b>	<b>Título de la unidad de planificación</b>	<b>Objetivos de la unidad de planificación</b>	<b>Destrezas con Criterio de desempeño</b>	<b>Orientaciones metodológicas</b>	<b>Evaluación</b>
Octavo						
Noveno						
Décimo						



### Anexo 6: Rúbrica para el análisis del PUD

<b>Indicador</b>	<b>Objetivo</b>
Título	Da a conocer el título de la planificación
Objetivo	Determina el cumplimiento de los planes educativos establecidos por el currículo nacional con el fin de garantizar el aprendizaje de funciones.
Destrezas con criterio de desempeño	Da a conocer todas las DCD que se pretende lograr en el tema de funciones.
Actividades de aprendizaje	Presenta las actividades propuestas para el cumplimiento de las DCD en el tema de funciones, tomando en cuenta la articulación y los momentos de la clase.
Recursos	Define los recursos de trabajo para el cumplimiento de DCD.
Evaluación	Señala los indicadores de evaluación con respecto a las DCD seleccionadas.
	Determina las técnicas de evaluación para el logro de indicadores propuestos en el tema de funciones.
	Define los instrumentos de evaluación empleados en el tema de funciones que evidencien y validen el aprendizaje de la población estudiantil.



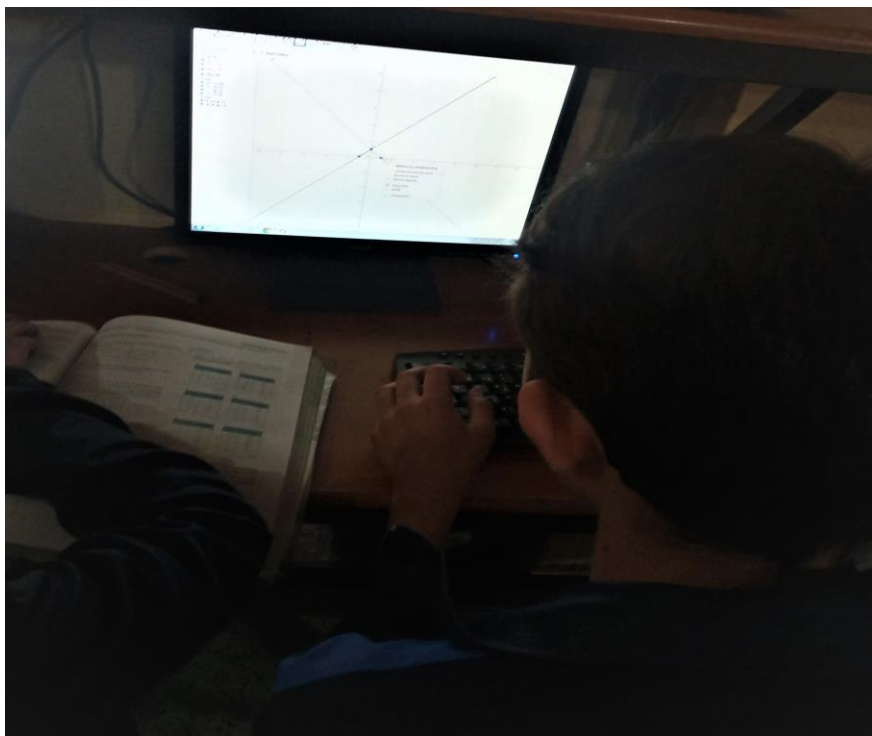
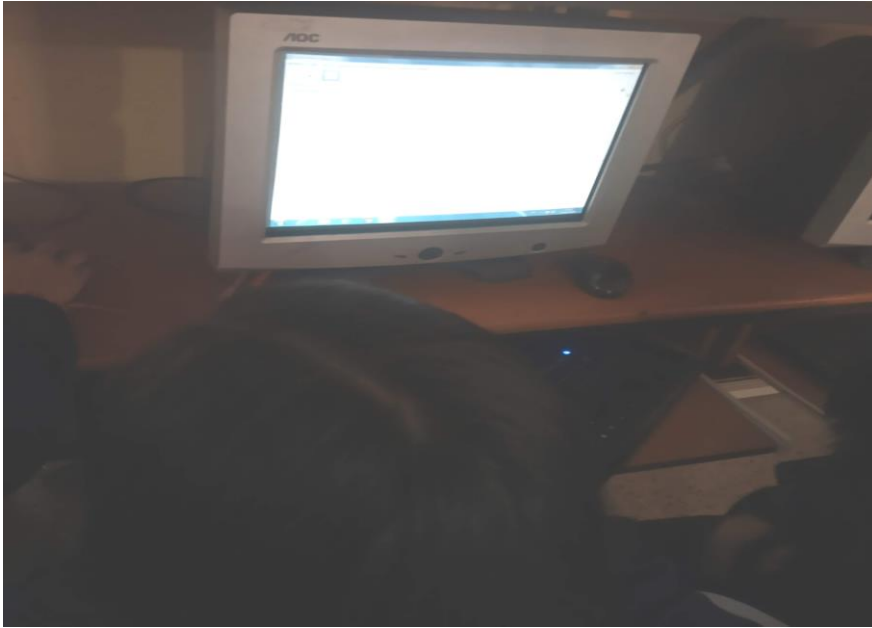
**Anexo 7: Rúbrica para revisión de los textos del Ministerio de Educación**

<b>Indicador</b>	<b>Objetivo</b>
Contenidos	Presenta los subtemas a abordar junto a ejemplos explicativos de funciones que generen una comprensión.
Contenidos	Usa diversos símbolos matemáticos en el tema de funciones que favorezcan el aprendizaje.
Ejemplos	Propone una secuencia de transformación para los registros semióticos de una función.
Ejemplos	Presenta los cuatro tipos de registros semióticos en un mismo ejemplo de función.
Actividades	Propone actividades que involucren problemas de conversión de una función.
Actividades	Describe las DCD que se pretende lograr con el taller en el tema de funciones.



## Anexo 8. Fotografías de la observación participante


Estudiantes trabajando con el software GeoGebra y Texto del estudiante



**Fuente:** Cámara personal



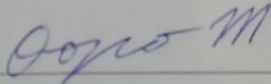
Certificado del tutor

 **Certificado del Tutor**  
Certificado para Trabajo de Integración Curricular de Carreras de Grado de Modalidad Presencial

Carrera de: Educación Básica  
Itinerario Académico en: Pedagogía de la Matemática

Yo, Miguel Alejandro Orozco Malo, tutor del Trabajo de Integración Curricular de Carreras de Grado de Modalidad Presencial denominado "Estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador" perteneciente a los estudiantes: Tannya Andreina Tene Tenempaguay con C.I. 030271184-1. Doy fe de haber guiado y aprobado el Trabajo de Integración Curricular. También informo que el trabajo fue revisado con la herramienta de prevención de plagio donde reportó el 9 % de coincidencia en fuentes de internet, apegándose a la normativa académica vigente de la Universidad.


Azogues, 02 de septiembre del 2020



PhD. Miguel Alejandro Orozco Malo  
C.I: 015199833-3



Cláusula de propiedad intelectual

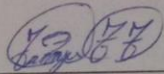
 **UNAE**

**Cláusula de Propiedad Intelectual**  
Certificado para Trabajo de Integración Curricular de Carreras de Grado de Modalidad Presencial

Carrera de: Educación Básica  
Itinerario Académico en: Pedagogía de la Matemática

Yo, Tannya Andreina Tene Tenempaguay, autora del Trabajo de Integración Curricular de Carreras de Grado de Modalidad Presencial “Estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.


Azogues, 02 de septiembre del 2020



\_\_\_\_\_  
Tannya Andreina Tene Tenempaguay  
C.I: 030271184-1



Cláusula de autorización para publicación en repositorio

 **UNAE**

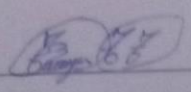
Cláusula de licencia y autorización para publicación en el  
Repositorio Institucional  
Certificado para Trabajo de Integración Curricular de Carreras de Grado de Modalidad Presencial

Carrera de: Educación Básica  
Itinerario Académico en: Pedagogía de la Matemática

Yo, Tannya Andreina Tene Tenempaguay, en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del Trabajo de Integración Curricular de Carreras de Grado de Modalidad Presencial "Estrategia de enseñanza basada en semiótica para el aprendizaje de funciones en el subnivel Superior de la Educación General Básica del Ecuador", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad Nacional de Educación UNAE una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad Nacional de Educación UNAE para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Azogues, 02 de septiembre del 2020



Tannya Andreina Tene Tenempaguay  
C.I: 030271184-1