CAPÍTULO 6

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA

María José Ferreira da Silva
zeze@pucsp.br
Pontificia Universidad Católica de São Paulo
São Paulo, Brasil

Saddo Ag Almouloud
saddoag@pucsp.br
Pontificia Universidad Católica de São Paulo
São Paulo, Brasil

1. Introducción

Desde hace algún tiempo la enseñanza de la geometría ha sido motivo de preocupación para los investigadores. Pavanello (1993) encontró que la enseñanza se enfocaba en el álgebra, lo que llevaba a los estudiantes a operar reglas sin cuestionar, dejando en un segundo plano una enseñanza que forje el pensamiento crítico y autónomo, el análisis de hechos, relaciones y deducción. Poco después, en 1995, Lorenzato sugirió hacer un esfuerzo a las áreas educativas para favorecer cambios en la enseñanza de la geometría, ya que constató que había toda una generación que no la había estudiado y, por tanto, no sabría enseñarla. Desde entonces, muchos investigadores han trabajado para destacar los procesos de aprendizaje de la geometría. Mirando de cerca a la geometría elemental, podemos considerarla como un campo importante de las matemáticas —como objeto de estudio y como instrumento para otras áreas—, lo que da lugar a la construcción de una infinidad de situaciones para su enseñanza. Sin embargo, los profesores de educación básica la señalan como uno de sus problemas para la docencia (Manrique, Silva y Almouloud, 2002).

Como respuesta a los diferentes problemas de enseñanza, no solo de la geometría, la Secretaría de Educación Fundamental del MEC presentó en 1998 los Parámetros Curriculares Nacionales- PCN (Brasil, 1998) que señalaban la necesidad de formación docente para nuevas alternativas de enseñanza. Bajo este contexto, elaboró el PCN+ (Brasil, 2002) para la enseñanza media (alumnos de 15 a 17 años) sugiriendo la importancia de:

> reconocer su naturaleza y ubicar el objeto de estudio dentro de los diferentes campos de las matemáticas, es decir, decidir utilizar formas algebraicas, numéricas, geométricas, combinatorias o estadísticas. Por ejemplo, para calcular distancias o efectuar mediciones en sólidos, utilizar conceptos y procedimientos de

> geometría y medidas, mientras que, para analizar la relación entre espacio y tiempo en el movimiento de un objeto, elegir el recurso algebraico de las funciones y sus representaciones gráficas (p.115).

Sin embargo, estos parámetros no causaron el efecto deseado, ya que las evaluaciones externas de los alumnos continuaron mostrando un bajo desempeño, no solo en Geometría, sino en Matemáticas en general. Se cree que faltó discusión de los documentos, tanto en la formación inicial como en la continua, ya que el primero no ofrecía una propuesta para la enseñanza de los diferentes contenidos, y el segundo, impartido en cursos esporádicos, no fue suficiente para un cambio efectivo en la práctica en la sala de clase.

Con el afán de buscar respuestas a diversas interrogantes y nuevas prácticas para la enseñanza de la geometría, el grupo de investigación del Programa de Posgrado en Educación Matemática de la PUC-SP (Pontificia Universidade Católica de São Paolo) entre los años 2000 y 2002 desarrolló un proyecto (financiado por la FAPESP, Fundación de Amparo e Investigación del Estado de Sao Paolo) con el fin de estudiar los factores y estrategias que podrían influir en la enseñanza y en el aprendizaje de las nociones geométricas en los grados finales de la Enseñanza Fundamental (alumnos de 11 a 14 años) con profesores de matemáticas en una educación continua. Algunos resultados, presentados por Manrique, Silva y Almouloud (2002), apuntaron a una fuerte tendencia de los docentes a trabajar en el aula con contenidos enfocados solo en la métrica, justificando su uso en la vida diaria del alumno. Pero, al mismo tiempo, mostraron dificultades para lidiar con la noción de distancia, por ejemplo, mostrando una comprensión incompleta o errónea y concepciones falsas.

En 2004, Silva, Manrique y Almouloud encontraron pequeños cambios en las prácticas de estos docentes y sugirieron la falta de confianza en los formadores, en las estrategias empleadas, en las otras personas del grupo y en sus propios conocimientos como uno de los factores que interfieren en la posibilidad de mayores cambios. Y reveló que, en general, los docentes estudiados no cuentan con un repertorio adecuado para articular los enunciados, presentan dificultades en la comprensión de las definiciones matemáticas y en la interpretación de formas y elementos presentados en una figura. Si bien los planes de estudio resaltan la importancia de rescatar la enseñanza de la geometría en la educación básica, el docente no sabe claramente qué hacer.

Perpetuando el pobre desempeño de los estudiantes en matemáticas en las evaluaciones externas y la necesidad de un currículo nacional, el Ministerio de Educación llamó a la sociedad a desarrollar una Base Nacional Común Curricular (BNCC) que fue aprobada en el 2017 para Educación Primaria y para la Enseñanza Secundaria, en el 2018 (Brasil, 2018).

En una comparación, no realizada a profundidad, entre los PCN y la BNCC para bachillerato, Silva y Almouloud (2018) mostraron que la BNCC presenta como una habilidad que desarrollar "el cálculo de áreas totales y volúmenes de prismas, pirámides y cuerpos redondos (cilindro y cono) en situaciones reales, como el cálculo de costos de material para revestimientos o pinturas de objetos cuyos formatos son composiciones de los sólidos estudiados" (p.529) y sugirieron la construcción de modelos a partir de estos. Sin embargo, el documento no se refiere a la esfera como objeto de estudio, es decir, no enfatiza el desarrollo de conocimientos matemáticos para el estudio de problemas relacionados con la Tierra, por ejemplo. También señalan que el documento no se refiere a *planificación* o poliedros que fueron estudios sugeridos en los PCN.

Si bien documentos de dos décadas sugieren una enseñanza de la geometría orientada a la construcción de conocimientos críticos sobre el espacio que nos rodea, hasta el día de hoy su enseñanza es bastante precaria y se basa en el estudio de objetos geométricos enfocados solo en la métrica, con la presentación, principalmente, de fórmulas por parte del profesor. Pero, en la actividad mencionada anteriormente por la BNCC, se percibe una remisión a una teoría de la didáctica de las matemáticas, la de los *registros de representación semiótica* como algo que se debe considerar en la enseñanza. Eso es lo que se abordará a continuación.

Este capítulo tiene como objetivo ofrecer algunas reflexiones teóricas sobre la enseñanza de la geometría en la educación básica, más específicamente de la geometría espacial. Numerosos estudios de las últimas décadas señalan que la docencia de esta área no se da de manera satisfactoria en este nivel educativo, aun con las sugerencias dadas desde 1998 por los Parámetros Curriculares Nacionales, lo que no estimula el desarrollo cognitivo del alumno en términos de percepción, justificación y razonamiento para comprender o transformar el mundo.

En este sentido, el aporte de la teoría de registros de representación semiótica a la didáctica de las matemáticas autoriza elaborar situaciones para la enseñanza de la geometría que propician no solo la conversión de representaciones y el desarrollo de diferentes tipos de aprehensión de figuras, sino también el uso de softwares de representación dinámica que posibilitan tratar de otra forma contenidos propios o no del currículo. Se describirán algunos resultados de estudios que asocian esta teoría a otras y que conducen a una nueva percepción de contenidos de geometría espacial, incluidos o no en el currículo de educación básica, pero que permiten reflexionar sobre su pertinencia a integrar ese currículo.

2. Registros de representación semiótica -TRRS

Según Duval (2011, p.100), además de los sistemas que representan códigos, que cumplen la función de comunicación, existen otros que cumplen las funciones cognitivas de objetivación y tratamiento, es decir, permiten la transformación del contenido de representaciones que el primero no provoca. Para el autor, un registro es un sistema semiótico cognitivamente creativo que, en primer lugar, debe producir representaciones que facilitan el acceso a objetos inaccesibles. En segundo lugar, debe determinar un campo de operaciones específicas que transformen las representaciones en otras nuevas en el interior del registro y que cambien el contenido de representación de un objeto, de un registro a otro. Estas dos formas de transformación se denominan *tratamiento* y *conversión*; la primera llama la atención por ser privilegiada, mientras que la segunda puede causar dificultades a los estudiantes.

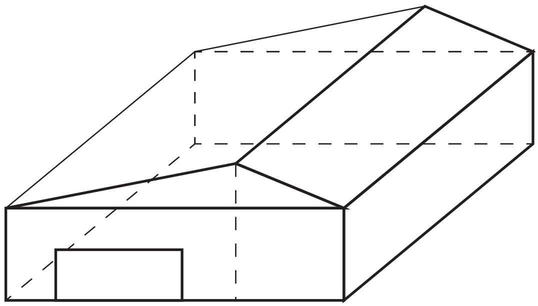
Para Duval (2006) "la complejidad cognitiva subyacente a los procesos de pensamiento en matemáticas radica en el hecho de que hay dos formas bastante diferentes de transformaciones que nunca se consideran explícitamente en la enseñanza" (p.105). Agrega que los procesos de pensamiento matemático dependen de una sinergia cognitiva de los registros de representación y que su coordinación amplía la capacidad mental. Para el autor, el desafío de la educación matemática es, en primer lugar, desarrollar la capacidad de cambiar el registro porque incluso las representaciones más icónicas o concretas deben articularse con representaciones producidas en sistemas semióticos.

En el caso de la enseñanza de la geometría, según Almouloud (2010), esta referencia explica el papel fundamental de las representaciones semióticas en las actividades cognitivas con las funciones de comunicación, tratamiento intencional y conciencia (objetivación). Para Duval (1995), la geometría involucra tres formas de proceso cognitivo que cumplen funciones epistemológicas específicas: visualización (como un proceso que examina el espacio), construcción (como un proceso realizado por instrumentos) y razonamiento (en el proceso del discurso para la extensión del conocimiento, para la prueba y para la explicación). Aunque estos procesos pueden desarrollarse por separado, la construcción puede conducir a la visualización, pero depende de la conexión entre las propiedades matemáticas y las técnicas de construcción, mientras que el razonamiento depende de un cuerpo de proposiciones.

Para el desarrollo de estos procesos, el autor ofrece cuatro formas distintas de aprehender una figura (una representación en el registro de representación figurativa):

La *aprehensión perceptiva* es la que implica la interpretación de las formas de la figura en una situación geométrica para identificar o reconocer de forma directa el objeto representado. Por ejemplo, en la Figura 1, como reconocimiento directo del objeto podemos decir que se representa una casa o un galpón.

Figura 1. Aprehensión perceptiva - la figura de una casa o un cobertizo

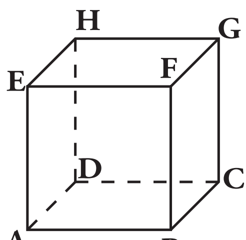


Fuente: *Elaboración propia*

La *aprehensión discursiva* es la que permite interpretar los elementos de la figura geométrica, privilegia la articulación de los enunciados en una red semántica de propiedades del objeto, además de las que pueden ser explícitas en una leyenda o por las hipótesis, tal como se observa en la Figura 2.

Figura 2. Aprehensión discursiva

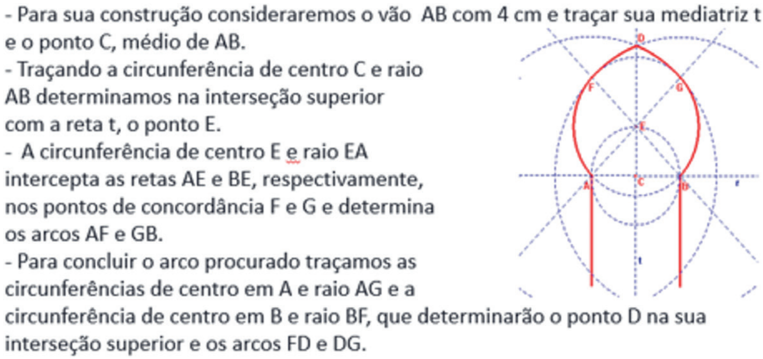
Cubo ABCDEFGH, portanto, ABEF congruente a BCFG



Fuente: *Mello (2015)*

La *aprehensión secuencial* se desarrolla en tareas de construcción o descripción con el objetivo de reproducir una figura con la ayuda de instrumentos, como se observa en la Figura 3.

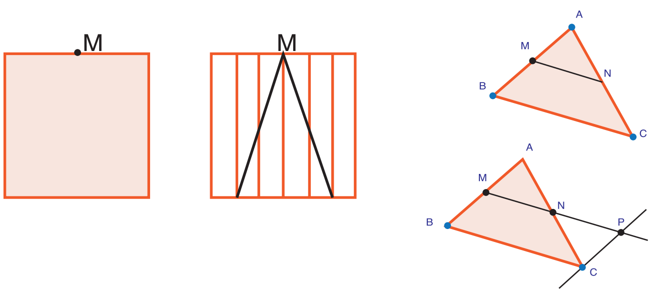
Figura 3. Aprehensión secuencial para la construcción de un arco de herradura



Fuente: *Elaboración propia*

La *aprehensión operativa* se construye en situaciones que solicitan posibles modificaciones a una figura, lo que sugiere una reorganización perceptiva que pueda conducir a la solución de un problema dado, como se nota en la Figura 4.

Figura 4. Aprehensión operativa



Fuente: *Elaboración propia*

Duval (2011) también distingue tres tipos de modificaciones para la aprehensión operativa de una determinada figura: (a) la modificación ***óptica*** que permite aumentar, disminuir o deformar una figura a partir de la producción de una imagen de la figura (homotecia); (b) la modificación *posicional,* que mueve una figura dada sin cambiar las medidas y la forma (rotación, traslación etc.), y (c) la modificación *mereológica* que descompone o compone una figura a partir de la relación de la parte-todo, en particular, la *reconfiguración* (basada en la percepción) que consiste en reorganizar una o más subfiguras diferentes de una figura dada en otra figura y la *deconstrucción dimensional* que reconoce unidades figurativas 2D/2D o 3D/2D. Ciertamente, para el autor;

> La solución de un problema de Geometría 'en el espacio' requiere otra mirada, una que le permita ver la forma 2D obtenida por la intersección de un sólido con un plano cualquiera en el espacio. Y eso requiere mucho trabajo para pasar de un objeto 3D/3D a sus múltiples representaciones posibles en 3D/2D (p.93).

La resolución de un problema puede requerir la articulación entre dos o más tipos de aprehensión: la articulación entre las aprehensiones perceptivas y discursivas, en la que es necesario ver la figura desde las propiedades evidentes o las hipótesis y no desde las formas que se destacan y que caracterizan la *figura geométrica* en la que la aprehensión discursiva depende de la aprehensión perceptiva. La *visualización* es la articulación entre las aprehensiones perceptivas y operativas en la que la percepción no requiere conocimiento matemático, pero puede dominar la aprehensión operativa. La *heurística y la demostración* son articulación entre las aprehensiones operativas (subordinadas a la perceptiva) y las discursivas. La *construcción geométrica* es la articulación entre operaciones discursivas y secuenciales que requieren la perceptiva.

Para Duval (2011) "es necesario proponer tareas en las que se excluya toda actividad de medición y de cálculo. Para aprender a ver, los estudiantes deben aprender a trabajar sin recurrir primero a los aspectos métricos" (p.92). Y agrega que las operaciones figurativas son esenciales para poder aplicar fórmulas o para aplicar una propiedad y que las tareas deben ser diferentes para las operaciones mereológicas de reconfiguración y deconstrucción dimensional.

Además de este marco ¿cómo podemos explicar de manera específica la razón para enseñar geometría en la escuela básica?

a. ¿Por qué enseñamos geometría?

Como se ha visto, el proceso de aprendizaje de la geometría lleva al alumno a desarrollar un pensamiento que le permite comprender, describir y representar el mundo en el que vive, considerando que su estudio estimula la observación y percepción de semejanzas y diferencias, la identificación de regularidades, etc., además de ser un terreno fértil para las relaciones con otras áreas del conocimiento.

Para Parzysz (2006), el objetivo de la enseñanza de geometría en la escuela básica es llevar a los estudiantes a disponer progresivamente de una geometría teórica:

> Obtenida como un modelado del espacio físico que permite responder, sin ambigüedades, a preguntas en el dominio espacial —incluso en la vida cotidiana— por el hecho de que ella no está sujeta al azar y a las contingencias ligadas a la percepción (p.147).

Marmo Carlos y Marmo Nicolau (1995, p.6) argumentan que el diseño geométrico permite al alumno desarrollar una comunicación universal para la transmisión de un lenguaje específico de las figuras, así también el poder sacar diversas conclusiones a partir de poca información, lo que permite liberar la creatividad.

Por otro lado, para Gascón (2003) la didáctica de las matemáticas no puede negarse a explicar por qué existe lo que existe y por qué no existe lo que no existe en el ámbito de las instituciones didácticas. Para él, las situaciones centrales de la geometría elemental están ligadas a la determinación y construcción de figuras geométricas. También considera que la geometría sintética (sin referencias cartesianas, ni fórmulas) posee técnicas limitadas para la introducción de la enseñanza de la geometría analítica y sus técnicas, haciendo de la limitación de las técnicas sintéticas la razón de ser de las técnicas analíticas, aunque, a menudo, la geometría analítica requiera el uso de técnicas sintéticas.

Desde el punto de vista del conocimiento que se pretende que el alumno construya, Chevallard (1990) afirma:

> Todo conocimiento, de hecho, es producido por un trabajo específico y el conocimiento producido puede ser integrado a un saber, ser duradero, mezclarse y volverse natural. Como ejemplo de este conocimiento natural presenta la regla que permite calcular la medida del área de un triángulo como siendo el semiproducto de

la medida de la base por la altura del triángulo. El conocimiento todavía puede sobrevivir en los márgenes de un saber y, por lo tanto, necesita ser redescubierto indefinidamente, como es el caso de la fórmula atribuida a Heron para el cálculo de esa misma medida en función de las medidas de sus lados. De los saberes trabajados son generados, con más frecuencia, conocimientos efímeros, que tendrán que ser reinventados para luego ser olvidados porque no fueron institucionalizados en el saber. Esto ocurre todos los días, en cada clase de cada escuela (p.10).

Entonces se debería enseñar geometría por ser un área que ayuda a desarrollar cognitivamente al alumno en términos, principalmente, de percepción, justificación y razonamiento para no solo entender el mundo, sino también poder participar en acciones que lo transformen con creatividad. Además, la didáctica de las matemáticas tiene mucho que aportar para que la enseñanza potencie la construcción de conocimientos naturales explícitamente relacionados con los saberes matemáticos. Es en este sentido que, a continuación, se presentan algunos ejemplos de resultados de investigaciones que utilizaron este marco teórico para desarrollar reflexiones que pueden contribuir a la enseñanza de la geometría en la educación básica.

3. Algunas reflexiones para la enseñanza de la geometría

En vista de lo anterior, se coincide con Almouloud (2010) cuando afirma que tenemos que construir situaciones encaminadas a aprender la geometría haciendo que las figuras geométricas jueguen su papel heurístico y provoquen sus diferentes aprehensiones, considerando la importancia de los registros de representación semiótica. Así, se considera que para la construcción de conocimientos geométricos es necesario sustentar su enseñanza en construcciones geométricas, actividades de resolución de problemas geométricos, actividades de formulación y de pruebas asociadas con la toma de decisiones y comprensión.

El grupo de investigación, bajo esta perspectiva, presenta algunas investigaciones que se han desarrollado en torno a la enseñanza o aprendizaje de la geometría. La mayoría de ellas se basaron, además de la TRSS antes mencionada, en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1997) y en la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) de Chevallard de 1999, de las cuales se introducen algunas reflexiones de forma sucinta.

La TSD busca crear un modelo de interacción entre el alumno, el saber y el ambiente en el que debe tener lugar el aprendizaje. La construcción de la teoría se basó en algunos conceptos fundamentales como: situación didáctica, situación a-didáctica, situación fundamental, devolución, ambiente antagónico y contrato didáctico. Estos diferentes conceptos conducen a caracterizar al proceso de aprendizaje a través de una serie de situaciones reproducibles, que muchas veces conducen a la modificación del comportamiento de los estudiantes involucrados en este proceso que busca la construcción de un determinado conjunto de conocimientos. El objeto central de la TSD no es el sujeto cognitivo, sino la situación didáctica en la que se identifican las interacciones que se establecen entre docente, alumno y saber. Brousseau (1997) pretende teorizar los fenómenos vinculados a estas interacciones y la especificidad del conocimiento enseñado.

La TAD estudia las relaciones sujeto-institución-saber. Chevallard (1999) estudia al ser humano frente al saber matemático, más específicamente, frente a situaciones matemáticas. Una razón para usar el término antropológico es que la TAD ubica el estudio de las matemáticas dentro del conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. En esta teoría, las nociones de (tipo de) tarea, (tipo de) técnica, tecnología y teoría permiten modelar las prácticas sociales en general y, en particular, la actividad matemática. Un conjunto de técnicas, tecnologías y teorías organizadas para un tipo de tarea forma una praxeología u organización puntual. La palabra praxeología está formada por dos términos griegos, praxis y logos, que significan, respectivamente, 'práctica' y 'razón'. Una práctica humana dentro de una institución siempre está acompañada de un discurso más o menos desarrollado, y de un logos que la justifica, la acompaña y le da razón.

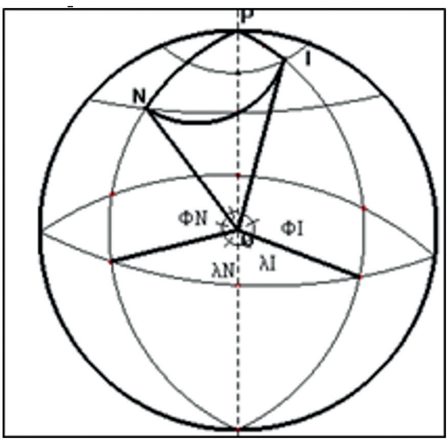
Considerando el espacio reservado para este texto, se discute sobre las investigaciones que se ocupan de la geometría espacial, específicamente, las nociones de geometría esférica y el estudio de los poliedros.

La primera investigación que se presenta es la de Pataki (2003, p.134) quien propuso una reflexión sobre la articulación entre la geometría esférica y la geografía y elaboró una secuencia didáctica, a partir de una situación problema, cuyo objetivo fue mostrar la relación interdisciplinar entre esos dominios del conocimiento. Esta situación-problema llevó a la exploración de algunas nociones vistas más intensamente desde el punto de vista de la geografía, a saber: polos, Ecuador, paralelos terrestres, meridianos, latitud y longitud de un lugar. La elaboración y la experimentación de esta secuencia se basaron en la TSD y fueron trabajadas con profesores de secundaria de escuelas públicas del Estado de São Paulo. La primera actividad fue la siguiente:

El comandante de un barco recibió el siguiente mensaje desde un helicóptero: se localizan náufragos en una isla de coordenadas $_I = 68°$ *40'N y* $\lambda_I = 013° 40'$*E. En ese momento, la posición del barco era* $\Phi_N =$ *42° 10'N y* $\lambda_N = 051° 20'$*O. ¿Qué distancia deberá recorrer el barco para llegar a la isla?*

Para la representación de esta situación se utilizó un triángulo de vértices P, N, I, correspondientes, respectivamente, a un polo, a la posición del barco y a la posición de la isla, tal como se puede observar en la Figura 5. Tal triángulo está construido sobre una superficie esférica; el globo terrestre se llamó triángulo esférico porque sus lados son arcos de circunferencias máximas, es decir, segmentos de línea recta en el sentido dado por Riemann.

Figura 5. Representación del triángulo PNI

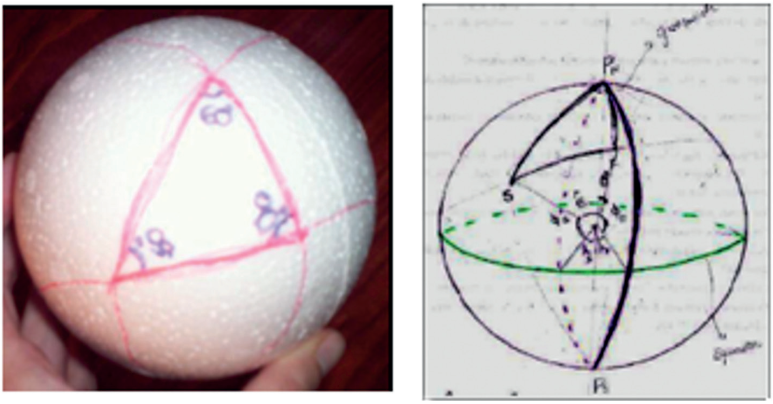


Fuente: *Pataki (2003)*

Los resultados alcanzados nos llevan a inferir que la secuencia de enseñanza propuesta parece consistente y coherente, pues su construcción, tal como el trabajo de un ingeniero, se basó en cimientos firmes previamente asentados, se construyó a través de la relación entre teoría/experimentación y finalizó con su validación/institucionalización. La situación inicial permitió utilizar diferentes conocimientos relacionando saberes de matemáticas y geografía.

En la investigación de Andrade (2011, p.87, 131) se puede encontrar la apropiación de conceptos elementales de geometría esférica por parte de estudiantes de segundo año de secundaria (16 años). El estudio permitió considerar distancias en la superficie terrestre y fue, por tanto, importante para comprender el espacio en el que vivimos. Propuso una secuencia didáctica compuesta por nueve actividades que utilizaron, entre otros, el registro material (pelota de poliestireno) para resolverlas. En la Figura 6 se observa la representación de un triángulo esférico en una pelota de poliestireno y la representación de la latitud y longitud en registro figurativo del polo, del fuerte y de la ciudad según el contexto del problema que se estaba resolviendo.

Figura 6. Representación en registro material y figurativo de un triángulo esférico

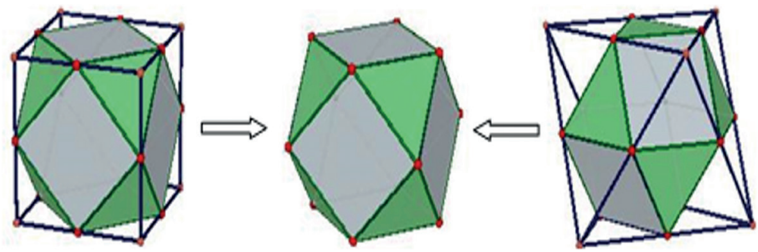


Fuente: *Andrade (2011)*

La autora demostró que al movilizar conocimiento de la geometría euclidiana es posible llevar a los estudiantes de secundaria a construir conocimientos de geometría esférica. Asimismo, relevó la importancia de utilizar diferentes registros, incluido el material (pelota de poliestireno) para la percepción de la línea recta en esta geometría.

Aun en el sentido de trabajar contenidos que no forman parte del currículum, Almeida (2010, p.131) constató que los sólidos arquimedianos ya fueron enseñados en educación básica en la disciplina del Dibujo a partir de la construcción de modelos planos de sus superficies, pero que desaparecieron por completo cuando esta disciplina dejó de existir. Propuso, entonces, que podrían retornar a la vida con la ayuda de Cabri 3D, basado en la problemática ecológica de Chevallard, para señalar las condiciones para la supervivencia de estos sólidos en la educación. Realizando un estudio epistemológico encontró un procedimiento matemático utilizado por los renacentistas para la construcción de algunos sólidos arquimedianos y, utilizando el software, construyó siete de los trece a partir de cortes (operación de truncamiento) por planos de sólidos platónicos. Por ejemplo, el cuboctaedro representado en la Figura 7, que tiene catorce caras, seis cuadradas y ocho triangulares, se puede obtener truncando planos que pasan por puntos medios de las aristas de un cubo o de un octaedro regular.

Figura 7. Cuboctaedro generado a partir del cubo u octaedro



Fuente: *Almeida (2010)*

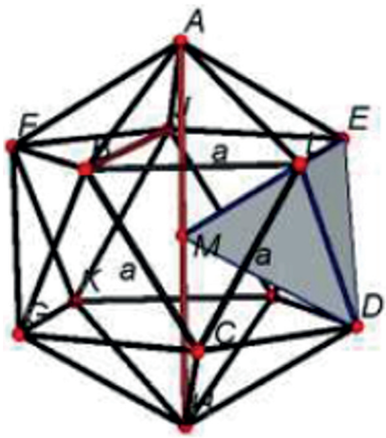
Según el análisis de las construcciones, la autora identificó tratamientos y conversiones de representaciones en diversos registros y observó que los tratamientos figurativos asociados a la aprehensión discursiva son los que posibilitan estas construcciones. Se infiere la posibilidad de trabajar con sólidos arquimedianos por parte de estudiantes de secundaria porque facilitan el desarrollo de las aprehensiones de una figura, además de relaciones con el campo algebraico porque puede conducir al desarrollo de fórmulas para el cálculo de medidas de sus volúmenes, como lo muestran Silva y Almouloud (2013).

Los autores presentaron una praxeología u organización matemática para el desarrollo de una fórmula para el cálculo de medida del volumen de un octaedro regular a partir de un cubo de arista *a*, para luego desarrollar la fórmula para el cálculo de medida del volumen de un cuboctaedro. Después de una praxeología para construir la fórmula $V = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$ en que *x* representa la medida de arista del octaedro regular, desarrollaron una para la construcción del cuboctaedro y otra para el desarrollo de una fórmula para el cálculo de medida de su volumen. Considerando que $a = \frac{4x}{\sqrt{2}}$ resulta así que $V = \frac{5\sqrt{2}x^3}{3}$ es la fórmula que se busca considerando que *x* sea la medida de arista del cuboctaedro.

La cuestión del desarrollo de fórmulas condujo el estudio de Possani (2012, p.84) cuyo objetivo fue investigar la apropiación del cálculo de medida del volumen del icosaedro regular por parte de estudiantes de tercer año de secundaria, a partir de una secuencia de actividades mediadas por el uso del software Cabri 3D. Desde el punto de vista teórico-metodológico, se basó en la TSD y TRRS, más específicamente en las diferentes aprehensiones de una figura y sus posibles modificaciones.

La secuencia se construyó con el propósito de conseguir que los estudiantes participantes en la investigación movilizaran sus conocimientos de geometría plana y geometría espacial durante la resolución de las tareas propuestas, involucrando al icosaedro regular y el uso del software Cabri 3D. La idea principal del autor es que, utilizando la descomposición de un icosaedro regular en veinte pirámides triangulares congruentes (Figura 8) que encajan perfectamente en el icosaedro y con sus aristas convergiendo hacia el centro de este sólido, los estudiantes se den cuenta de que la medida del volumen del icosaedro es igual a la suma de las medidas de los volúmenes de las veinte pirámides triangulares congruentes.

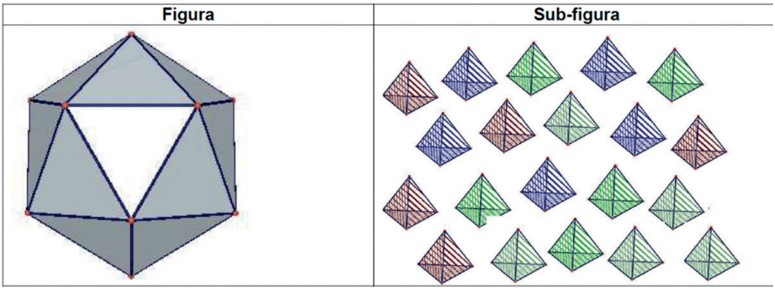
Figura 8. Pirámide triangular que compone el icosaedro regular



Fuente: *Possani (2012)*

Para realizar esta descomposición, el autor usó la modificación mereológica que consiste en la división de un icosaedro en varias pirámides rectangulares, y las agrupó para formar una nueva. La Figura 9 muestra la descomposición de un icosaedro regular en veinte pirámides triangulares congruentes.

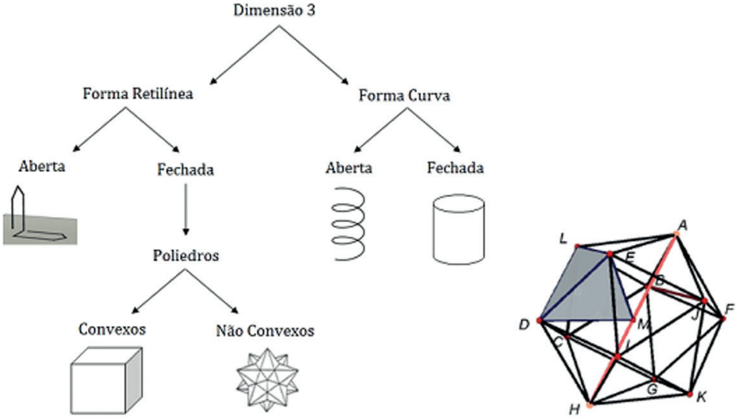
Figura 9. Modificación mereológica de un icosaedro regular



Fuente: Possani (2012)

Palles (2013, p.41, 49), basado en el trabajo de Possani, estudió la secuencia didáctica a partir de la noción de *visualización*. Para ello, la autora amplió la clasificación de las unidades figurativas de Duval considerando figuras de dimensión 3 (Figura 10). Tal ampliación facilita la deconstrucción dimensional de figuras 3D en figuras 3D, como, por ejemplo, la percepción de una pirámide en un icosaedro (p.41 y p.49). La autora constató que el desarrollo de la visualización de figuras geométricas debe cumplir su función heurística: permitir aplicar tratamientos específicos y la aprehensión operativa. Sin embargo, concluye que el autor no exploró lo suficiente este rol heurístico porque privilegió la aprehensión secuencial para la construcción de figuras, y concluye también que algunos cambios en la secuencia podrían, de hecho, permitir el desarrollo de la visualización.

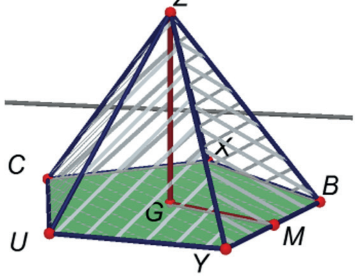
Figura 10. Clasificación de unidades figurativas de dimensión 3 y pirámide en icosaedro regular



Fuente: *Palles (2013)*

Santos (2016, p.143), utilizando el tema de los volúmenes, exploró la construcción de poliedros regulares a partir de los desarrollados por Euclides en el libro 13 usando Cabri 3D con el fin de verificar si presentan las relaciones métricas necesarias para el desarrollo de fórmulas para el cálculo de medida de sus volúmenes. Organizó su trabajo en tres partes. En la primera exploró las construcciones propuestas por Euclides y las adaptó para ser construidas en el software; en la segunda buscó las relaciones entre medidas que indujeran a deducir fórmulas para el cálculo de medida de sus volúmenes y, en la tercera averiguó las condiciones necesarias para determinar si una pirámide de base regular pentagonal puede o no formar parte de un dodecaedro regular, así como las condiciones para que un tetraedro pueda componer o no un dodecaedro regular. En este estudio verificó, con base en la construcción presentada por Euclides, que si se considera una pirámide con base pentagonal *YUCXB*, se tiene el centro en G y el vértice en el punto Z.

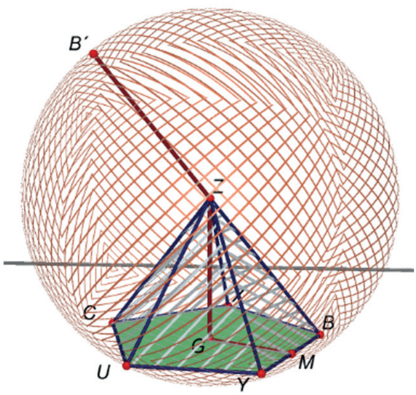
Figura 11. Soporte para la composición de un dodecaedro regular



Fuente: *Santos (2016)*

Si la altura GZ es $h = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ y $MG = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ con *a* representando la medida del lado del pentágono o la medida de arista del posible dodecaedro y $\overline{\text{BZ}}$ el radio de una posible esfera en la que se podría inscribir el dodecaedro, es decir, $BZ = \frac{d}{2} = r = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ entonces Z representa el centro de la esfera en la que está inscrito el dodecaedro. Habrá un punto *B´*, simétrico de *B* en relación a *Z* tal que el segmento *BB´* representa el diámetro de esa esfera (nótese la Figura 12) y los vértices del pentágono de la pirámide pertenecen a ella.

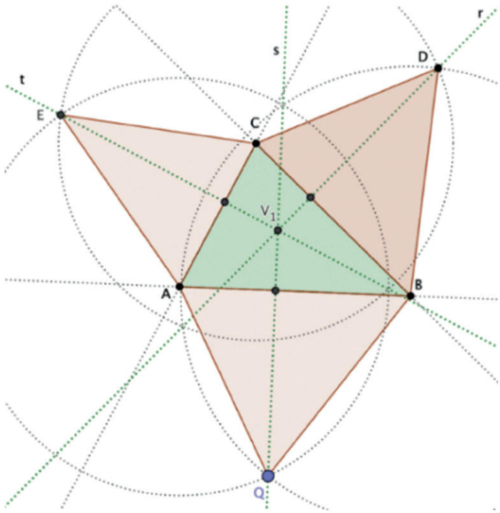
Figura 12. Esfera circunscrita en un posible dodecaedro



Fuente: *Santos (2016)*

Si bien las planificaciones de superficies de poliedro como posible representación en el plano son parte de la docencia, en general se presentan listas para ser recortadas (Figura 13) para que el modelo construido sea utilizado únicamente para la identificación de vértices, aristas y caras que, con algo de suerte, pueden servir para relacionar esos elementos.

Figura 13. Representación en el plano de superficies de sólidos geométricos



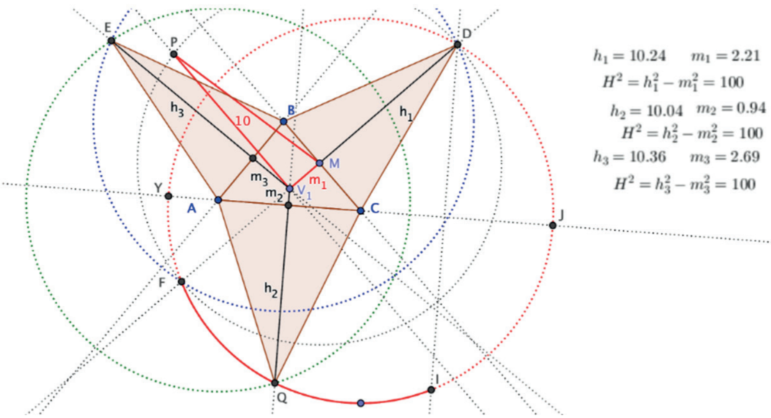
***Fuente**: Silva y Almouloud (2018)*

A partir de esta perspectiva, y seguros de que no se discute sobre sus construcciones, Silva y Almouloud (2018) retoman un artículo publicado en 2001 con el objetivo de ampliar las discusiones y presentar un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) para la construcción en Geogebra de planificaciones de superficies de pirámides triangulares de altura determinada. Una pregunta motivadora para el estudio podría ser, por ejemplo: ¿cualquier representación compuesta por cuatro triángulos que tengan de dos en dos un lado común puede representar la superficie de una pirámide triangular?

La búsqueda de respuestas conduce a la verificación de varias relaciones métricas que deben ser consideradas para garantizar que la planificación permita la construcción del modelo tal como se explica en la Figura 14. La observación tanto del modelo espacial como de las conclusiones extraídas para obtener la representación plana llevan a buscar las condiciones para determinar la altura de la pirámide en la planificación y concluir así la tarea de encontrar esa representación para una altura determinada.

Los autores presentan las relaciones métricas necesarias tanto para garantizar la construcción efectiva del modelo como la posibilidad de imponer condiciones específicas para el modelo, como es el caso de la altura de la pirámide. Destacan también la importancia de utilizar Geogebra como herramienta de construcción, lo que, además de posibilitar el movimiento de la figura, también proporciona diversos modelos con apenas una construcción y la posible impresión con las medidas estipuladas.

Figura 14. Relaciones métricas para verificar la altura de la pirámide



Fuente: *Silva y Almouloud (2018)*

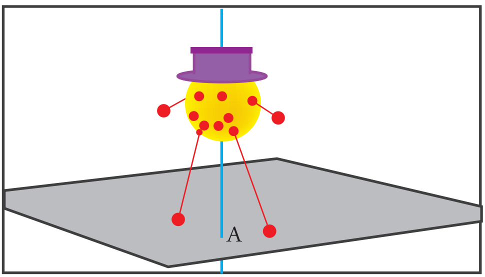
Considerando la importancia de usar varios programas computacionales para la enseñanza de la geometría, Salazar (2009, p.249) utilizó Cabri 3D para trabajar con estudiantes de secundaria con transformaciones geométricas en el espacio, fundamentado en el TRRS y el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995). El objetivo fue investigar cómo estos estudiantes se apropiaban de los recursos de Cabri 3D en el aprendizaje de estas transformaciones y cómo esta integración interfiere en el proceso.

La primera actividad (Figura 15), luego de ser construida, fue animada con los recursos del software y la transformación de rotación, entre otras. A continuación, se analizó tanto la aprehensión secuencial utilizada por los estudiantes como los esquemas de uso (conceptos y reglas de acción) involucrados en esta construcción. Para la autora, la interacción de los estudiantes con Cabri 3D sirvió para explorar las figuras desde diferentes puntos de vista del observador y facilitó su aprehensión secuencial por parte de los estudiantes. El registro figurativo dinámico facilitó la observación de la aprehensión operativa de las figuras, en concreto la modificación mereológica, y mostró la modificación posicional.

Figura 15. Actividad 1: construcción de la muñeca

Construye una muñeca (cabeza, manos, pies, ojos, sombrero) desde una línea recta perpendicular al plano base, pasando por el punto A.

Guarde su construcción, nombrando el archivo de la siguiente manera: <nombre> _boneco_1



Fuente: *Salazar (2009)*

La TRRS fue el punto de partida para que Mello (2015) investigara en su tesis el desarrollo de la visualización por estudiantes ciegos. Descubrió que los alumnos reconocen las formas e identifican figuras planas representadas en relieve sobre papel, pero no reconocen representaciones de sólidos geométricos en perspectiva. También constató que estos alumnos visualizan primero las partes y luego visualizan el todo, aunque presentan en las actividades realizadas las aprehensiones perceptivas, operativas y discursivas, a pesar de un repertorio muy limitado para la geometría. Uno de los problemas percibidos para el desarrollo de la visualización fue la ausencia de aprehensión secuencial, ya que los estudiantes no contaban con herramientas adaptadas para construcciones geométricas. Para llenar este vacío, la autora construyó un tablero de dibujo en relieve positivo para que el estudiante tuviera la oportunidad de dibujar. La Figura 16 muestra los intentos de un estudiante por representar un triángulo.

Figura 16. Representación de un triángulo por un estudiante ciego

Fuente: *Mello (2015)*

Para la autora, al alumno ciego se le debe enseñar a reconocer las representaciones en perspectiva, ya que durante las entrevistas encontró que pequeñas intervenciones con modelos de madera conducían a tal reconocimiento en las figuras.

Estos trabajos, entre otros, permitieron abordar algunos contenidos de geometría espacial que forman parte o no de los planes de estudio utilizando algún software de representación dinámica. Ellos demostraron la importancia de los *registros de representación semiótica* (incluido el material) para el desarrollo de las diferentes aprehensiones de las figuras por parte de los estudiantes, ya que se colocaron como protagonistas en la construcción de sus conocimientos, y porque permitieron articular los conocimientos geométricos con los conocimientos algebraicos en actividades de desarrollo de fórmulas para medidas de volúmenes.

4. Conclusiones

El uso de software de representaciones dinámicas es uno de los puntos importantes en las discusiones sobre la enseñanza de la geometría. Según Gravina (2015), las tecnologías digitales permiten la creación, producción y difusión de conocimientos a partir de la interacción con sistemas dinámicos de representación que externalizan e internalizan nuevos pensamientos, en un proceso continuo de acción/reacción entre sujeto y herramienta. Por ello, el uso de figuras dinámicas conduce a exploraciones y actitudes para el desarrollo del pensamiento geométrico de naturaleza deductiva. De igual modo y continuando con el autor, la interfaz interactiva "abierta a la exploración y la experimentación provoca experimentos de pensamiento, diferentes a los que suceden con el apoyo de papel y lápiz" (p.252).

El uso de un software para la representación de figuras en el espacio en perspectiva resultó imprescindible en estos trabajos. Se conmina a que otros estudios demuestren la ayuda de las tecnologías digitales para que los contenidos matemáticos dormidos o incluso olvidados puedan pasar a formar parte de la rutina escolar con el fin de ampliar el universo de la geometría en la escuela y darle un sentido. Un aporte importante en este caso es el dinamismo de las figuras construidas en un registro dinámico. Por otro lado, el desarrollo de las diversas aprehensiones de las figuras, así como sus articulaciones (la visualización, la figura geométrica, la construcción geométrica y la demostración) se vuelven esenciales para la comprensión de la geometría. Para Duval (2011, p. 84), la construcción de figuras por instrumentos o algún *software* provoca confiabilidad y objetividad porque permite verificaciones y observaciones, actividades en las que *ver* es importante.

Además, la reflexión sobre los contenidos que existen en el currículo y la forma en que se enseñan invita a mirar otras formas de enseñanza y a buscar situaciones que lleven a los estudiantes a construir conocimientos y no solo memorizaciones temporales que, en muchos casos, no se recuperarán en el futuro. En algunas de estas obras se puede ver la importancia de la relación entre geometría y álgebra en el desarrollo de fórmulas para el cálculo de medida de volumen, algunas con posibilidades de ser trabajadas en el bachillerato, como es el caso de los sólidos de Arquímedes y la geometría esférica, o incluso, de una reflexión matemática respecto a cómo construir de manera efectiva un modelo de un sólido geométrico a partir de su representación mediante la planificación.

Otro punto relevante es que la mayoría de estos trabajos muestran a la geometría como fuente para el desarrollo de conocimientos algebraicos. Para Chevallard (1994), la escuela no interviene de tal manera que haga del cálculo algebraico un medio, su enseñanza generalmente se lleva a cabo sin relación con un objetivo que justifique las manipulaciones realizadas con expresiones algebraicas. Para el autor, la escuela niega al álgebra su papel como herramienta para la creación de conceptos y tiende a reducirla a una actividad automática sin ningún propósito real de creación, lo que muestra una cierta marginación epistemológica. Agrega que problemas concretos, relacionados con la realidad o con áreas de estudio de la naturaleza o incluso con la propia práctica matemática, pueden ser reconocidos como un campo de intervención de la herramienta algebraica lo que permite la percepción de la funcionalidad del álgebra sin reducirla a la manipulación formal de expresiones algebraicas, a la resolución de ecuaciones o de ciertos problemas prototípicos.

Referencias bibliográficas

Almeida, T. (2010). *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Almouloud, S. (2010). Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.), *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 125-148). Papirus.

Andrade, M. (2011). *Geometría esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Ensino Fundamental: terceiros e quarto ciclos. MEC/SE.

Brasil (2002). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (2002). *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.* https://cutt.ly/IvWI2Fv.

Brousseau, G. (1997) *La théorie des situations didactiques – Le cours de Montréal.* https://cutt.ly/3vWI7uQ.

Chevallard, Y. (1989-1990). Le passage de l´atihmetique a l´algebrique dans l´enseignement des mathematiques au college. Troisième partie: voies d´attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l´algebre et transposition didactique. *Rendiconti del seminario matematico. Univerisità Politecnico. Torino, 52*(2), 175-234.

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: *La Pensée Sauvage-Éditions*, *19*(2), 221-265.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine.* Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathématics*, *61*, 103-131.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Tradução: Marlene Alves Dias. PROEM.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA,*44, 25-34.

Gravina, M. (2015). O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. *VIDYA*, 35, 237-253.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista*, *São Paulo,* 4, 3-13.

Manrique, A., Silva, M., Almouloud, S. (2002). Conceitos geométricos e formação de professores do ensino fundamental. *Anais da 25º Reunião da ANPEd*.

Marmo, C. y Marmo, N. (1995). *Desenho Geométrico 2*. Editora Scipione.

Mello, E. (2015). *A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Palles, C. (2013). *Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica.* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement segundaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca Didattica*, GRIM, 17, 128-151.

Pavanello, R. (1993). O Abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, 1, 7-17.

Pataki, I. (2003). *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar.* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Possani, J. (2012). *Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: aproche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Salazar, J. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço.* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Santos, A. (2016). *Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática.* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

Silva, M. y Almouloud, S. (2013). Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. *Anais do VII CIBEM*, 7658-7665.

Silva, M., Manrique, A. y Almouloud, S. (2004). Possíveis mudanças de postura em professores do ensino fundamental trabalhando com geometria. *Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife.

Silva, M. y Almouloud, S. (2018). Um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo da planificação de superfícies de pirâmides triangulares. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, *20*(3), 327-346.