Universidad Nacional de Educación UNAE Universidad de Barcelona

Universidad Nacional de Educación

Maestría en Educación

DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA:

"FACTORIZACIÓN CON GEOMETRÍA A DOS COLORES"

AUTOR: MARCO VINICIO GUERRA GARCÉS

TUTORA: DRA. YULY VANEGAS

Master en Educación

Mención en: Enseñanza de la Matemática.

Azogues, julio del 2018

RESUMEN

En vista que el álgebra es una asignatura de trascendencia en grados superiores y que su estudio pasa muy rápido en los años básicos, se trata de lograr una comprensión completa de productos notables y factorización como base para estudios superiores de álgebra aplicando el razonamiento para la resolución de ejercicios en exposiciones y con un plan de recuperación de álgebra geométrica a dos colores, dando como resultado una comprensión más amplia de la factorización, aplicando los conocimientos adquiridos en la maestría y utilizando las Tics como medio de un conocimiento significativo, todo esto para resolver problemas de la vida diaria.

ABSTRACT

Considering that algebra is a subject of great importance in higher years, and that it is studied only briefly as part of basic education, the intended purpose is achieving a complete understanding of special products and factoring as a base of superior algebra studies that apply logical reasoning in order to solve exercises in class presentations and with a plan for recuperating geometric algebra with two colors, resulting in an ampler understanding of factorization, applying the knowledge acquired in the masters degree and using the Tic's as a significative knowledge method, all this to resolve daily life issues.

Palabras clave: Álgebra, geometría, recuperación.

ÍNDICE

Javier Loyola, Julio de 2018

Yo, Marco Vinicio Guerra Garcés, autor/a del Trabajo Final de Maestría, titulado: **"FACTORIZACIÓN CON GEOMETRÍA A DOS COLORES"**, estudiante de la Maestría en Educación, mención **Enseñanza de la Matemática** con número de identificación 1002524310, mediante el presente documento dejo constancia de que la obra es de mi exclusiva autoría y producción.

1. Cedo a la Universidad Nacional de Educación, los derechos exclusivos de reproducción, comunicación pública, distribución y divulgación, pudiendo, por lo tanto, la Universidad utilizar y usar esta obra por cualquier medio conocido o por conocer, reconociendo los derechos de autor. Esta autorización incluye la reproducción total o parcial en formato virtual, electrónico, digital u óptico, como usos en red local y en internet.

2. Declaro que en caso de presentarse cualquier reclamación de parte de terceros respecto de los derechos de autor/a de la obra antes referida, yo asumiré toda responsabilidad frente a terceros y a la Universidad.

3. En esta fecha entrego a la Universidad, el ejemplar respectivo y sus anexos en formato digital o electrónico.

Nombre: Marco Vinicio Guerra Garcés

Firma: ______________________________

1. INTRODUCCIÓN

a. Intereses y contextualización de su labor docente

Me inicie como docente, remplazando a los profesores de planta, en la Unidad Educativa Fiscomisional "Emaús", en el mes de marzo del año 2001, con lo cual descubrí mi vocación por la enseñanza y el aprendizaje. Desde esa experiencia me fui preparando hasta obtener mi licenciatura en educación y trabaje en el mismo colegio pero como docente de planta, para que ocurra esto tuvieron que pasar nueve años. Trabaje tres años más como profesor de Física y Matemáticas para el bachillerato hasta que gane el concurso de Quiero ser Maestro e ingrese a la escuela Básica "Manuel Abad" con el nombramiento fiscal, el primero de abril del 2013, en la cual preste mis servicios como maestro de Matemáticas de básica superior por tres años. Pasado este tiempo vía reubicación estoy prestando mis servicios en la Unidad Educativa Fiscomisional. "Don Bosco la Tola" en la que dicto clases de Matemáticas y Física en el bachillerato.

En mi preparación tengo varios cursos de matemáticas en estos diecisiete años de docente, me gusta mucho innovar, utilizar la tecnología y programas de matemáticas y física, formar en valores a mis estudiantes y trabajar en el razonamiento lógico de los alumnos. Por eso aplique a la beca para cursar esta maestría que voy a poner en práctica en beneficio de mis educandos.

b. Estructura del dossier o memoria

La estructura de la secuencia didáctica está compuesta de: La presentación de la secuencia didáctica con los objetivos que se espera alcanzar en los siete periodos de clase de dos horas pedagógicas de 40 min cada una, las actividades que los alumnos deben realizar para alcanzar las destrezas que ayuden a comprender los contenidos, con su respectiva guía de anexos, explicada en cada sesión de clase, también, como se realizó la implementación de esta unidad didáctica Repaso de Algebra, explicando la interacción del estudiante con su profesor indicando los aciertos y dificultades obtenidas en las clases dictadas y por último una valoración de la secuencia didáctica con propuesta de mejora que servirá como guía para futuras secuencias didácticas en educación.

2. PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA IMPLEMENTADA

a. Presentación de objetivos

i. Relacionar la geometría a dos colores con el álgebra por medio de figuras geométricas.
ii. Construir figuras geométricas a dos colores para trabajar los casos más utilizados de factorización.
iii. Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expresiones algebraicas mediante material manipulativo como es geometría a dos colores.
iv. Deducir propiedades algebraicas de la potenciación de números reales con exponentes enteros utilizando la geometría a dos colores.
v. Implementar la recuperación de los alumnos con dificultades en la destreza de factorización mediante el juego didáctico dominó matemático de productos notables y factorización.

b. Presentación de contenidos y su contextualización en los currículos oficiales.

Título de unidad de planificación: REPASO DE ÁLGEBRA

- Repaso y revisión de contenidos
    - Operaciones con radicales.
    - Racionalización.
    - Operaciones con polinomios.

- Productos Notables
  - Producto de un monomio por una suma algebraica.
  - Producto de dos binomios.
  - El cuadrado de la suma de dos términos.
  - El cuadrado de una diferencia de dos términos.
  - El cuadrado de un trinomio.
  - El producto de la suma de dos expresiones algebraicas por su diferencia.
  - El producto de dos binomios que tienen un término común.
- Cocientes Notables
  - Aplicación de cocientes notables más importantes.
- Factor Común
  - Explicación.
  - Ejemplos.
  - Ejercicios.
- Factor común por agrupación de términos
  - Explicación.
  - Ejemplos.
  - Ejercicios.
- Trinomio cuadrado perfecto
  - Explicación.
  - Ejemplos.
  - Ejercicios.
- Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción
  - Explicación.
  - Ejemplos.
  - Ejercicios.
- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
  - Explicación.
  - Ejemplos.
  - Ejercicios.

- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
    - Explicación.
    - Ejemplos.
    - Ejercicios.
- Diferencia de cuadrados perfectos
    - Explicación.
    - Ejemplos.
    - Ejercicios.

- Suma y diferencia de cubos perfectos
    - Explicación.
    - Ejemplos.
    - Ejercicios.

- Exposiciones y defensa de los procedimientos de un ejercicio.
- Recuperación con Algebra Geométrica a dos colores.
- Si fuera necesario realizar una nueva recuperación con Dómino de Productos Notables.

c. Diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje en relación con los objetivos y los contenidos.

SESION 1

Tema: Repaso y revisión de contenidos.

Tiempo: Dos periodos de 40 min.

Este repaso es para activar conocimientos previos imprescindibles para tener una mejor comprensión de los productos notables y factorización, se repasará contenidos como propiedad distributiva, radicales, exponentes y operaciones con polinomios.

El trabajo será en forma individual tomado del libro Matemáticas 1 del Ministerio de Educación, páginas 11 y 12 actividades: **Ver anexo 1. Ejercicios de repaso propuestos en la sesión 1.**

Revisamos ejercicios que tengan dificultad y paso a evaluar con una lección escrita sobre los temas tratados. (Editorial Don Bosco, 2016)

Se realizó la evaluación de radicales y exponentes ya que en este tema encontré dificultad, mientras que en las operaciones con polinomios los estudiantes demostraron que adquirieron la destreza. Esta evaluación diagnóstica nos permite tener un punto de partida para poder ingresar a los productos notables y factorización. El resultado es favorable y me permite avanzar con el álgebra. **Ver anexo 2. Evaluación Diagnóstica realizada por los alumnos en la sesión 1.**

Se envía a investigar los productos notables y cocientes notables para la sesión 2, lo que será el punto de partida y activación de conocimientos para empezar con el nuevo tema.

SESION 2

Tema: Productos notables y Cocientes notables.

Tiempo: Dos periodos de 40 min.

En esta sesión se realiza las siguientes preguntas para activar los conocimientos previos:

¿De acuerdo a lo investigado defina que es un producto notable y un cociente notable?

¿Los productos notables y cocientes notables facilitan las operaciones de multiplicación y división de polinomios?

Utilizando como guía el ÁLGEBRA ELEMENTAL MODERNA tomo 1 de Gonzáles Mancill para ordenar los conocimientos y que todos los estudiantes concreten sus investigaciones.

Ver anexo 3. Productos y cocientes notables del Algebra de Mancill páginas 164 y 175

Se realizó en forma individual, en el pizarrón, las demostraciones de las expresiones de los productos notables y cocientes notables para una mejor comprensión de los estudiantes.

Ejemplo Producto Notable:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Demostración:

$(a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Ejemplo Cociente Notable:

$$\frac{ma + mb + mc}{m} = a + b + c$$

Demostración:

$$\frac{ma + mb + mc}{m} = \frac{m(a + b + c)}{m} = a + b + c = \frac{ma + mb + mc}{m}$$

Se realiza estas demostraciones para que los estudiantes vean que con los productos notables y cocientes notables se puede facilitar las operaciones de polinomios. (M.O. Gonzáles, Álgebra Elemental Moderna Volumen 1, 2016)

SESION 3

Tema: Factor Común y Factor Común por Agrupación de Términos.

Tiempo: Dos periodos de 40 min.

En esta sesión empezamos con la Descomposición de Factores, iniciando con los dos casos de factor común ya que estos son más sencillos, en los cuales tienen que tener conocimientos básicos de máximo común divisor de la parte numérica y de la parte literal las veces que se repite, los números y parte literal que sobran a cada termino se ponen entre paréntesis con su signo respectivo.

Ejemplo:

$$4a^2x^3 - 8a^3y^2 + 12a^4z = 4(aaxxx - aaayy + aaaaz) = 4aa(xxx - ayy + aaz) =$$
$$4a^2(x^3 - 2ay^2 + 3a^2z)$$

Para el caso de factor común por agrupación de términos, se indica a los alumnos que si no hay un factor común en todos los términos se agrupa por términos que tengan factores comunes en números y la parte literal y se procede como en el caso de factor común en cada grupo. Entonces se obtiene un factor común para toda la expresión.

Para que los conocimientos se vuelvan significativos resolveríamos en clase ejercicios los cuales serán explicados por los estudiantes que voluntariamente deseen participar. **Ver anexo 4. Ejercicio 54 página 181 y 182. Ejercicio 55 página 184. Algebra de Mancill.**

Se pide a los alumnos que realicen la investigación trinomios para aplicarlos en la siguiente clase como inicio y activación de conocimientos previos. (M.O. Gonzáles, Álgebra Elemental Moderna Volumen 1, 2016)

SESION 4

Tema: Trinomios

Tiempo: Dos periodos de 40 min.

Se inicia la sesión con la participación de los estudiantes sobre los trinomios en base a lo investigado.

Se realiza las siguientes preguntas que servirán para activar conocimientos previos:

¿Qué características cumplen los trinomios?

¿Para que este trinomio sea cuadrado perfecto que tenemos que tomar en cuenta?

¿Qué relación tiene con los exponentes, radicales y productos notables?

De las respuestas de los estudiantes se obtiene el siguiente resultado guiado por el docente.

Para que sea trinomio cuadrado perfecto tiene que cumplir con:

- El polinomio tiene que tener tres términos ordenados de forma ascendente o descendente.
- El primer y el tercer término tienen que ser positivos y que se pueda obtener de estos la raíz cuadrada.
- Realizando la multiplicación por 2, a las dos raíces, tenemos que obtener el mismo valor que el segundo término sin importar el signo.
- Cumplidas estas condiciones estamos en circunstancias de declarar este polinomio como un trinomio cuadrado perfecto.
- En el caso que no cumplan con lo requerido anteriormente, se tiene que evaluar el polinomio para ver si tenemos un caso de trinomio Cuadrado Perfecto por adición y sustracción, un caso de trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ o un caso de trinomio de la forma $2x^2 + bx + c$

Es importante direccionar las reglas que rigen los procesos matemáticos con los estudiantes para que ellos se apropien de los procesos, en esta sesión se trabajó en la identificación de trinomios y la resolución por el proceso más adecuado. **Ver anexo 5. Ejercicios 56, 57, 58, 59, 60 y 61 de las páginas 185 a la 197.** Este trabajo se realizó en grupos en os cuales el docente pasa resolviendo las dudas y aclarando procesos que en las investigaciones de los estudiantes estén ambiguas, lo importante es que las destrezas sean alcanzadas con la guía del profesor. (M.O. Gonzáles, Álgebra Elemental Moderna Volumen 1, 2016)

SESION 5

Tema: Diferencia de cuadrados perfectos y Suma y diferencia de cubos perfectos

Tiempo: Dos periodos de 40 min.

En esta sesión, la última antes del repaso para la evaluación, con la explicación del docente de cómo realizar exposiciones orales para la defensa de un ejercicio, se resolvió ejercicios de diferencia de cuadrados y suma y resta de cuadrados perfectos, también se realizó la participación de los estudiantes en forma individual para reconocer:

- Reconocimiento del caso de factorización.
- Explicar el método de resolución más adecuado para el ejercicio propuesto, razonando de porque se escogió dicho procedimiento.
- Indicar si existe otra forma de resolución del ejercicio propuesto.

Los ejercicios tomados en cuenta para esta sesión **Ver anexo 6. Ejercicios 63 página 200 ejercicio 64 página 201 los literales pares.** (M.O. Gonzáles, Álgebra Elemental Moderna Volumen 1, 2016)

Explicación del Docente.

- Primero se identifica si es una diferencia de cuadrados perfectos o una suma o resta de cubos perfectos el cual tiene que cumplir con:
  - Es un binomio, suma o la diferencia de dos expresiones algebraicas.
  - Cada miembro del binomio es un cuadrado perfecto o cubo perfecto y/o esta elevado a una potencia par o impar.
  - Se obtiene las raíces de cada expresión y lo escribimos como el producto de la suma de las dos raíces multiplicado por la diferencia de las dos raíces. También se explica que la diferencia puede ir primero ya que la multiplicación es conmutativa, esto se realiza si es una diferencia de cuadrados perfectos.

- Si es una suma o diferencia de cubos perfectos se extrae la raíz cúbica y se escribe la multiplicación de la suma o resta las dos raíces cúbicas multiplicado por el cuadrado de la primera raíz, la suma o resta de la multiplicación de las dos raíces y la suma de la segunda raíz.
- El razonamiento tiene que explicar porque este sería el mejor procedimiento y si existe otro procedimiento porque se escogió el utilizado.
- Si existe otro método se crearía un debate de los pros y contras de cada procedimiento y las recomendaciones de la utilización de uno u otro.

Ejemplo:

Utilizando las siguientes reglas.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + a^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + a^2)$$

Realizar:

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$$
$$= (a + b)(a^2 - ab + a^2)(a - b)(a^2 + ab + a^2)$$

Es importante realizar este ejercicio se exponga defendiendo los procesos con razonamiento lógico, para que los estudiantes defiendan su trabajo y contesten preguntas del docente.

Para la próxima sesión los estudiantes prepararan exposiciones, defensa de un ejercicio y razonamiento utilizado del Ejercicio 68 de repaso del Algebra de Mancill páginas de la 212 a la 215. **Ver anexo 7. Ejercicio 68 de repaso del Algebra de Mancill páginas de la 212 a la 215. Los múltiplos de 10.** (M.O. Gonzáles, Álgebra Elemental Moderna Volumen 1, 2016)

SESION 6

Tema: Exposiciones y defensa de los procedimientos de un ejercicio.

Tiempo: Dos periodos de 40 min.

En esta sesión los estudiantes defenderán un ejercicio escogido por ellos, con “defender” se refiere a explicar el proceso seleccionado e investigado por los estudiantes. A más de realizar la resolución del ejercicio, los alumnos explicaran el caso de factoreo que es, la resolución del problema, el proceso, como llegar a la respuesta, si existe otro procedimiento porque no lo utilizaron. Todo esto se realizará con las preguntas del docente como guía y de los estudiantes presentes si las hubiera.

Se realizó el sorteo y los grupos tendrían que “defender” los siguientes literales del Ejercicio 68 de repaso del Algebra de Mancill páginas de la 212 a la 215:

$$6a^2c - 12ac^2 - 3a^2c^2$$

$$(x+y)^2 - 6a(x+y) + 9a^2$$

$$(x+2)^2 - (2x-3)^2$$

$$a^4 - 2a^2x - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 + x^2$$

$$(2x-y)^3 - (x+2y)^3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$$

$$9a^2 - 6ab + b^2 - 21x^2 + 12ax - 4bx$$

Los cuales se distribuyó a los siete grupos de siete estudiantes cada uno para su exposición, se grabó en vídeo y se envió por correo electrónico a la dirección marcovinicioguerra@gmail.com del docente para su revisión. **Ver anexo 8. Ejemplo de correo recibido con respuesta de comentario por parte del docente.**

En los videos se presenta una exposición de los grupos en la cual tienen que argumentar la operación que resolvieron, el método que van a utilizar, el proceso y como llegar a la respuesta. El orden de participación es al azar y se va registrando su participación con una calificación individual y colectiva. Mientras se realiza la exposición el docente va realizando preguntas de comprobación para ver la preparación de los estudiantes en esta defensa de ejercicio. Como ejemplo ver el video https://drive.google.com/file/d/0B4DyKbmEx5z0RW13YV9IdG5zVFE/view

La resolución que realizaron los estudiantes del ejercicio está en la siguiente foto. **Ver anexo 9. Resolución del ejercicio literal 120.** $\boldsymbol{9a^2-6ab+b^2-21x^2+12ax-4bx}$

En la cual realizan los procesos pero en el momento de la exposición tienen que argumentar de la manera aprendida en clase y de acuerdo a la investigación realizada tanto en forma individual como grupal. (M.O. Gonzáles, Álgebra Elemental Moderna Volumen 1, 2016; M.O. Gonzáles, Slideshare, 2013)

SESION 7

Tema: Recuperación con Algebra Geométrica a dos colores.

Tiempo: Dos periodos de 40 min.

En esta unidad los estudiantes recuperan las bajas calificaciones de una manera entretenida, con el Álgebra Geometría a dos colores, la cual consiste en tener cuadrados de 10 cm x 10 cm que representan a X por lado y su área seria X^2, cuadrados de 7 cm x 7 cm que representa Y por lado y como área Y^2, rectángulos de 10 cm x 7 cm que representan a lados X e Y respectivamente y como área tenemos XY, rectángulos de 10 cm x 1 cm que representan lado X y lado una unidad que tiene como área X, otro de 7 cm de la Y con lado una unidad que representa como área Y. por ultimo cuadrados de 1 cm x 1cm que representan como área la unidad. Se trabaja con cartulinas doble color, se escoge un color como positivo y otro color como negativo en la misma cartulina tenemos que puede darse X^2 un color y $-X^2$ al reverso con diferente color y así para las demás áreas. Ver foto. **Ver anexo 10. Foto de la presentación en la pizarra para que se guíen los estudiantes y fotos del trabajo en aula laboratorio.**

Los estudiantes realizan en grupo varias operaciones, suma, resta, multiplicación y factorización con polinomios que contengan X^2, $-X^2$, Y^2, $-Y^2$, XY, X, Y y números positivos y negativos, que tienen que presentar en grupo.

Esta sesión a más de servir como recuperación también sirve de preámbulo para ingresar a la unidad de geometría que tenemos que tratarla en el bloque cinco del programa.

Los estudiantes como trabajo en casa realizarán la revisión del video https://www.youtube.com/watch?v=SlkakgosW4k que se observó en el aula para que ellos implementen un ejercicio de algebra que ellos deseen con las fichas de Álgebra Geométrica a dos colores. Como evidencia enviaran las fotos por correo a la dirección marcovinicioguerra@gmail.com para su revisión. Para un ejemplo del correo y las fotos V**er anexo 11. Ejemplo de correo y fotos enviadas por los estudiantes.**

La recuperación alcanzo los objetivos deseados por lo que no será necesario realizar una nueva recuperación con el dómino de productos notables. (Garcia, 2014)

La Metodología aplicada en cada una de las sesiones es la siguiente:

Estrategias metodológicas

Método experiencial

Experiencia concreta.- Lluvia de ideas, sobre las propiedades de potenciación y radicación.

Reflexión – Observación.- Análisis de ejercicios básicos de potenciación, radicación, productos notables, cocientes notables y factorización.

Conceptualización.-

Ilustración de propiedades, definición de conclusiones

Aplicación.- Resolución de ejercicios y defensa de un ejercicio en grupo.

Recursos

Texto de Matemáticas

Internet

Computadora

Proyector

Parlantes

Material Auxiliar del estudiante.

Indicadores de logro

I.M.5.1.1. Aplica las propiedades algebraicas de los números reales en productos notables, factorización, potenciación y radicación. (I.3.)

d. Presentación de las actividades de evaluación formativa.

Actividades de evaluación Técnicas / instrumentos

Técnica: Prueba oral, Instrumento: Guía de preguntas estructurada.

Técnica: Prueba escrita, Instrumento: Cuestionario de base estructurada.

Recuperación: Álgebra Geométrica a dos colores. Juego didáctico. Dómino de fracciones algebraicas.

3. IMPLEMENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

a. Adecuación de los contenidos implementados a los planificados y adaptaciones realizadas.

En cada sesión de aprendizaje se buscó que el alumno realice una clase inversa, preparando el material y revisando conceptos para luego en clase poner en práctica con la guía del docente, con esto se logró que los estudiantes revisen de fuentes fiables y sentar los conocimientos en el aula en consenso con todos los participantes ya que existían diferentes criterios. También se puso como prioridad que el estudiante tiene que razonar al momento de realizar el desarrollo de procesos, de tal forma que debe buscar el proceso más adecuado para resolver los problemas e incluso decir si hay otra manera de resolverlo y porque no lo utiliza. Así por último, se hizo énfasis en la obtención de la respuesta que debe ser clara y ayudar a resolver los problemas planteados en la vida diaria.

En los trabajos en grupo se pidió como prioridad que los estudiantes manejen todos los conceptos como grupo y de forma individual, de tal manera que se evitó que los alumnos memoricen una parte de la exposición, sino más bien que en el momento requerido cualquier alumno está en la capacidad de contestar las preguntas y defender el problema integralmente.

b. Resultados de aprendizaje de los alumnos.

Los resultados de aprendizaje de los alumnos se evidencian en la forma de defender un problema de factorización, la mayoría de los estudiantes entendieron que los problemas tienen varias formas de resolverlo y deben encontrar la más práctica para este fin y que este conocimiento hay que razonarlo para llegar a un aprendizaje significativo, evitando memorizar procesos en forma mecánica que más adelante conllevarían en errores ya que el tema de factorización acompañara a los alumnos hasta grados superiores.

c. Descripción del tipo de interacción.

La interacción de los estudiantes con el docente y entre ellos se desenvolvió en un clima del respeto mutuo, dando a conocer las normas y reglamentos que rigen en la institución y en el aula de clase, así como también las normas de convivencia para poder trabajar de una forma adecuada. Los estudiantes son libres de participar en cualquier momento de la exposición del docente, de la exposición de los compañeros siempre y cuando se realice con el respeto adecuado y pidiendo la palabra. Dado el número de estudiantes se nombró una coordinadora de aula para poder realizar más actividades, tales como revisión de consultas, revisión de trabajos en el aula, y en los trabajos en grupo cada equipo nombra un coordinador para poder interactuar con el docente y seguir el proceso y la evaluación, el cual explica a su grupo para facilitar la información y la comprensión de los temas.

También dentro de la parte humana el docente está dispuesto a conversar con los estudiantes y atiendo en el área de ciencias exactas antes del ingreso a la jornada escolar para solucionar dudas, rectificación de notas y recepción de trabajos atrasados con la justificación y también conversar si los alumnos están con el ánimo de compartir con el profesor.

d. Dificultades observadas.

El inicio de una nueva etapa estudiantil para los alumnos que están cursando el primero de bachillerato, crea una incertidumbre en los alumnos ya que están empezando una curso que definirá su vida profesional, esto crea una dificultad porque los temas aunque no son nuevos del todo y los procesos que adquirieron en la etapa básica de su formación no acompañan a los nuevos conocimientos que se desarrollan en el bachillerato, hay dificultades en las nuevas formas de exposiciones de trabajos, en la cual tienen que defender con argumentos su forma de abordar y resolver un problema, comparar con otras representaciones y dar una conclusión del porque se escogió uno u otro proceso e incluso del porque no se realizó de la forma como proponen otros compañeros, creando un debate entre los participantes y otros grupos.

En un principio se creó una dificultad al pedirles que la resolución de problemas no tiene que ser de forma mecánica, sino más bien de una forma razona y explicando al detalle cada uno de los proceso y contestando preguntas mientras se va resolviendo el problema. Luego fueron comprendiendo esta nueva metodología pero se dificulto también cuando el trabajo era en grupo porque se repartían el ejercicio en partes que si se les cambiaba el orden los estudiantes se perdían y afectaban la nota del equipo.

4. VALORACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN Y PAUTAS DE REDISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Valoración de la unidad didáctica y propuestas de mejora, siguiendo las pautas que cada especialidad ha proporcionado para guiar la práctica reflexiva.

La unidad didáctica se realizó en la Unidad Educativa Fiscomisional “Don Bosco La Tola”, con los estudiantes de primero de bachillerato ciencias paralelo “B” con el tema del álgebra, factorización, se escogió este curso y este tema porque considero que es el inicio para los estudiantes en matemáticas más avanzadas y ellos tienen que tomar, en este grado, una decisión para toda la vida que es ni más ni menos su carrera profesional. Los alumnos van a tener que lidiar con el álgebra a lo largo de su carrera profesional en la universidad y en su trabajo, por lo que vi pertinente mejorar la comprensión del álgebra, sobre todo en la factorización y valerme de materiales didáctico, clase inversa, evaluaciones y metodología que obtuve como valor agregado ya que estoy cursando la Maestría en Docencia de Matemáticas.

Se realizara la valoración de acuerdo a la utilización de pautas que cada asignatura del Master y a los docentes que la impartieron, nos proporcionaron, así como también de acuerdo a los siguientes criterios:

Actividades de los alumnos.

Las actividades se realizaron en forma individual y grupal, en la parte individual se tomó en cuenta la asistencia ya que esto demuestra que el estudiante está comprometido con la asignatura, si el alumno es capaz de reconocer el ejercicio o problema que se le está planteando y el proceso adecuado para resolverlo, indicando cual sería el proceso más idóneo, más sencillo y que ocupe menos tiempo. Cuál sería el proceso alternativo y porque no lo utilizaron, esto permitirá el debate con el resto de estudiantes que se inclinan por uno u otro proceso. Llegar a la respuesta y utilizar este proceso para resolver problemas de la vida diaria aplicando las destrezas aprendidas en el aula. También el estudiante tiene que aplicar estos conocimientos en otros contextos ya que en su vida profesional tiene que estar preparado para poderlo implementar en su propio contexto, valga la redundancia. Todo esto con un razonamiento que permita evitar la mecánica y pueda el estudiante lograr la autonomía en los procesos, con lo cual obtenemos un nivel académico óptimo.

En la parte grupal, se tiene que en la formación de grupos se permitió que los estudiantes los constituyan de acuerdo a la afinidad, con esto se obtuvo una mejor unión de los grupos y mejoro el trabajo de equipo. Esto permitió evitar conflictos, también mejoró el clima de aula, optimizo la motivación y la capacidad de trabajo en los alumnos y por ende mejoro las calificaciones y el aprovechamiento de la asignatura.

En cada actividad se evidencio los objetivos, la metodología y los resultados de los estudiantes, tanto individual como en forma colectiva, con la ayuda del DECE, Departamento de Consejería Estudiantil y con el ojo atento de las autoridades. Este análisis lo hago basado en (Álvarez, 2011)

Análisis de las sesiones de clase.

De lo anterior, valoración del trabajo con los alumnos individual y colectivamente, voy a plantear una propuesta de mejora analizando los siguientes puntos:

En mi caso como docente de la asignatura de matemáticas me habría gustado trabajar más individualmente con los estudiantes y constatar que cada estudiante puede realizar por su cuenta el razonamiento, la propuesta de procesos adecuados para resolver un problema y como llegar a la respuesta adecuada que le sirva de aplicación en la vida diaria. No quiero poner de pretextos pero en mi caso tengo 49 estudiantes que me dificulto planificar lo antes indicado.

También en los trabajos en grupo tendría que fijarme si todos los estudiantes están cumpliendo con su labor en el equipo, recibo un informe verbal del coordinador lo cual debería extenderlo a escrito no solo guiarme en la calificación que aplica el coordinador de grupo.

Me falto indicar problemas en contextos reales ya que todos los ejercicios fueron realizados en contextos simulados y evocados, con esto el estudiante hubiera asimilado mejor los problemas para mejorar en su planteamiento de resolución.

En las planificaciones es importante mejorar la utilización del tiempo, ya que algunas actividades se las realizo de forma corrida y los estudiantes tuvieron que terminar en sus casas, para la revisión el coordinador de equipo tenía que enviarme por correo con lo que podía obtener su calificación final lo cual no me permite saber si todos los miembros del equipo trabajaron en mejorar y terminar el trabajo propuesto.

Tendría que trabajar con más material didáctico que sea manipulable para que los estudiantes creen conceptos y comprendan mejor la clase y su aplicación.

Para la resolución de problemas que no tienen que ser de forma mecánica sino que tienen que ser de forma razonada, tendría que dar un taller de razonamiento para que los estudiantes sepan a lo que se quiere llegar y no tener que explicaren el camino, por lo cual se perdió tiempo.

También ser un mejor motivador con los estudiantes para que las matemáticas les sean más agradables es imprescindible para mejorar la comprensión del tema.

Utilizar las Tics para resolución de problemas, como el programa GeoGebra y utilizar los laboratorios de la institución.

Así, también la recuperación planificada sobre el dominó, a pesar de no ser necesario ya que todos los estudiantes aprobaron el bloque, hubiera sido bueno aplicarlo para que los estudiantes obtengan este recurso para mejorar su comprensión.

5. REFLEXIONES FINALES

Escriba una valoración sobre los aprendizajes adquiridos a lo largo de toda la maestría sobre estos tres temas:

a. En relación a las asignaturas troncales de la maestría

Desde el inicio de la Maestría en Docencia Matemática los docentes me impactaron ya que su trato y forma de enseñar me cambiaron mi forma de ver la enseñanza y el aprendizaje. Asignaturas como Psicología me enseñó la forma de tratar y comprender a los adolescentes, en esta etapa de cambios físicos e intelectuales, tenemos que como docentes saber llegar a ellos, para motivarlos a que su aprendizaje sea más significativo.

La materia de Sociología, que por primera vez curse en mis años de estudio, me causo un poco de incertidumbre, pero gracias a la docente que impartía la clase llegue a comprender la importancia que la educación conlleva en las clases sociales, culturas y modos de producción de un enfoque práctico para comprender mejor mi labor como profesor.

Las asignaturas que apoyan a relacionarnos con los estudiantes como seres humanos, como Orientación y Tutoría, me sirvió de mucho para poder ayudar a mis estudiantes en conflictos que afectan a su desenvolvimiento adecuado en el aula de clase y si el próximo año se me da la oportunidad de ser tutor de los estudiantes con el curso que me dicto el maestro de esta asignatura, tengo elementos suficientes para desempeñar un buen papel.

Conocer la realidad de la educación de mi país y como planificar para superar dificultades me ayudó mucho en la asignatura de Sistema educativo Ecuatoriano para una educación Intercultural. Analizar el currículo vigente y ponerlo en práctica para mi trabajo diario fue el beneficio más notorio gracias a las clases de nuestro profesor de esta asignatura.

La disciplina de Investigación fue una herramienta fundamental para dar inicio a mi Trabajo de Final de Master en lo que respecta a la forma de presentación y normas generales de un trabajo bien presentado, citando adecuadamente las fuentes, siguiendo procesos adecuados para mejorar en mi puesta en acción la secuencia didáctica que propuse.

b. En relación a las asignaturas de la especialidad

En lo que respecta a las ciencias de Didáctica de las Matemáticas, complementos Disciplinares y la materia de Investigación e Innovación sobre la Propia Practica, que componen el núcleo de nuestra especialidad, los docentes que dictaron esta catedra nos mostraron un mundo diferente de lo que se puede realizar para beneficiar el aprendizaje de los estudiantes y de los futuros maestrantes, utilizando metodologías, secuencias didácticas, materiales que me sirvieron de mucho y que puse en práctica para mis alumnos en los distintos cursos que dicto las asignaturas de Física y Matemáticas. Programas como el GeoGebra que hoy no puede faltar en mis clases, actividades que realizamos con nuestros profesores en el aula y después las adapte para mis clases, como son las Matemáticas en la historia, contextos de las matemáticas, como resolver problemas, la actividad geométrica en otros contextos, estadística y como debe ser la clase adecuada para que los estudiantes aprendan. Todo lo expuesto anteriormente se complementó con resolución de ejercicios y trabajos investigativos que beneficiaron en alta medida mi forma de enseñanza – aprendizaje.

c. En relación a lo aprendido durante el TFM.

En mi ser estaba la expectativa de que podría poner en marcha para mi trabajo final, pero con la ayuda de mi tutora y su guía, esta incertidumbre se aclaró, ayudándome muy amablemente a poner en práctica mi propuesta, que poco a poco se fue puliendo y finalmente la realice con la experiencia que recibí en mis años de docente y en la maestría de la Universidad de Barcelona que estoy cursando. Mis gracias infinitas a cada uno de los docentes que me ayudaron impartiéndome sus conocimientos, los cuales los puse en práctica y resultó exitoso ya que mi forma de dar clases cambio para beneficio de mis estudiantes.

Los estudiantes tomaron de muy buen agrado la secuencia propuesta y colaboraron con todo su contingente para facilitarme la puesta en acción de la secuencia didáctica de factorización, de tal manera que la recuperación que estaba prevista no fue necesaria ya que todos los estudiantes superaron con sobra de merecimientos el temario.

En cada sesión de clase se ponía en práctica lo aprendido durante la maestría, que beneficio mucho para la enseñanza del algebra, fijándome en materiales concretos y relacionándolas con la geometría, todo esto para aplicarlo a la vida diaria de los estudiantes mediante ejercicios e investigaciones. También el uso permanente de las Tics, ayudo de mucho para concretar este trabajo, esperando que cumpla con las expectativas de mis profesores y para poner en práctica en futuras sesiones de trabajo en mi vida profesional.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, N. (15 de Enero de 2011). *''www.pedagogiamagna.com*. Obtenido de ''www.pedagogiamagna.com: file:///C:/Users/ADMIN-MINEDUC/Downloads/Dialnet-ProcedimientosYCriteriosDeEvaluacion-3628306.pdf

Editorial Don Bosco. (2016). Matematica 1. En E. D. Bosco, *Matematica 1* (págs. 11-12). Quito: Matematica 1.

Garcia, A. (20 de febrero de 2014). *Juegos y Matemáticas.* Obtenido de Juegos y Matemáticas: https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2014/02/20/cadena-de-dominos-de-identidades-notables/

M.O. Gonzáles, J. M. (14 de Mayo de 2013). *Slideshare.* Obtenido de Slideshare: https://es.slideshare.net/Rouderick/libro-algebra-de-mancil

M.O. Gonzáles, J. M. (2016). *Álgebra Elemental Moderna Volumen 1.* Quito: Libresa.

Naranjo, P. (06 de Enero de 2016). DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA:. *DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA:*. Quito, Pichincha, Ecuador: Publicaciones de la Universidad de Barcelona.

Vallina, N. Á. (15 de Enero de 2011). *www.google.com.ec.* Obtenido de www.google.com.ec: file:///C:/Users/ADMIN-MINEDUC/Downloads/Dialnet-ProcedimientosYCriteriosDeEvaluacion-3628306.pdf

7. TABLA 1. AUTOEVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES ADQUIRIDOS

	Apartados	Indicadores	A	B	C	D	Puntuación (0-10)
AUTOEVALUACIÓN DEL ESTUDIANTE	**Actividades realizadas durante la elaboración del TFM**	Tutorías presenciales	Falté a las tutorías sin justificar mi ausencia.	Falté a las tutorías presenciales y sí justifiqué mi ausencia.	Asistí a las tutorías presenciales sin prepararlas de antemano.	Asistí a las tutorías presenciales y preparé de antemano todas las dudas que tenía. Asimismo, planifiqué el trabajo que tenía realizado para contrastarlo con el tutor/a.	10
		Tutorías de seguimiento virtuales	Ni escribí ni contesté los mensajes del tutor/a.	Fui irregular a la hora de contestar algunos mensajes del tutor/a e informarle del estado de mi trabajo.	Contesté todos los mensajes virtuales del tutor/a y realicé algunas de las actividades pactadas en el calendario previsto.	Contesté todos los mensajes virtuales del tutor/a realizando las actividades pactadas dentro del calendario previsto y lo he mantenido informado del progreso de mi trabajo.	10
	Versión final del TFM	Objetivos del TFM	El trabajo final elaborado no alcanzó los objetivos propuestos o los ha logrado parcialmente.	El trabajo final elaborado alcanzó la mayoría de los objetivos propuestos.	El trabajo final elaborado alcanzó todos los objetivos propuestos.	El trabajo final elaborado alcanzó todos los objetivos propuestos y los ha enriquecido.	10
		Estructura de la unidad didáctica implementada	La unidad didáctica implementada carece de la mayoría de los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación).	La unidad didáctica implementada contiene casi todos los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación).	La unidad didáctica implementada contiene todos los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación).	La unidad didáctica implementada contiene todos los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación) y además incluye información sobre aspectos metodológicos, necesidades educativas especiales y el empleo de otros recursos.	10
		Implementación de la unidad didáctica	El apartado de implementación carece de la mayoría de los aspectos solicitados (adecuación de contenidos, dificultades de aprendizaje advertidas, observación de la interacción sobre las dificultades halladas inherentes a la actuación como profesor).	El apartado de implementación contempla casi todos los aspectos solicitados (adecuación de contenidos, dificultades de aprendizaje advertidas, observación de la interacción sobre las dificultades halladas inherentes a la actuación como profesor).	El apartado de implementación contempla todos los aspectos solicitados (adecuación de contenidos, dificultades de aprendizaje advertidas, observación de la interacción sobre las dificultades halladas inherentes a la actuación como profesor).	El apartado de implementación contempla todos los aspectos solicitados (adecuación de contenidos, dificultades de aprendizaje advertidas, gestión de la interacción y de las dificultades en la actuación como profesor), además de un análisis del contexto y de las posibles causas de las dificultades.	10
		Conclusiones de la reflexión sobre la implementación	Las conclusiones a las que he llegado sobre la implementación de la unidad didáctica son poco fundamentadas y excluyen la práctica reflexiva.	Las conclusiones a las que he llegado están bastante fundamentadas a partir de la práctica reflexiva, pero algunas resultan difíciles de argumentar y mantener porque son poco reales.	Las conclusiones a las que he llegado están bien fundamentadas a partir de la práctica reflexiva, y son coherentes con la secuencia y los datos obtenidos.	Las conclusiones a las que he llegado están muy bien fundamentadas a partir de la práctica reflexiva porque aportan propuestas de mejora contextualizadas a una realidad concreta y son coherentes con todo el diseño.	10
		Aspectos formales	El trabajo final elaborado carece de los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.) y no facilita su lectura.	El trabajo final elaborado casi cumple los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.), pero su lectura es posible.	El trabajo final elaborado cumple los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.) y su lectura es posible.	El trabajo final elaborado cumple los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.) y ha incorporado otras que lo hacen visualmente más agradable y facilitan la legibilidad.	10
		Redacción y normativa	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales dificultan la lectura y comprensión del texto. El texto contiene faltas graves de la normativa española.	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales facilitan casi siempre la lectura y comprensión del texto. El texto contiene algunas carencias de la normativa española.	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales ayudan a la lectura y comprensión del texto. El texto cumple con los aspectos normativos de la lengua española, salvo alguna errata ocasional.	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales ayudan perfectamente a la lectura y comprensión del texto. El texto cumple con los aspectos normativos de la lengua española y su lectura es fácil y agradable.	10
		Bibliografía	Carece de bibliografía o la que se presenta no cumple los requisitos formales establecidos por la APA.	Se presenta una bibliografía básica que, a pesar de algunos pequeños errores, cumple los requisitos formales establecidos por la APA	Presenta una bibliografía completa y muy actualizada, que cumple los requisitos formales establecidos por la APA.	Presenta una bibliografía completa y muy actualizada, que cumple los requisitos formales establecidos por la APA de forma excelente.	10
		Anexo	A pesar de ser necesaria, falta documentación anexa o la que aparece es insuficiente.	Hay documentación anexa básica y suficiente.	Hay documentación anexa amplia y diversa. Se menciona en los apartados correspondientes.	La documentación anexa aportada complementa muy bien el trabajo y la enriquece. Se menciona en los apartados correspondientes.	10
		Reflexión y valoración personal sobre lo aprendido a lo largo del máster y del TFM	No reflexioné suficientemente sobre todo lo que aprendí en el máster.	Realicé una reflexión sobre lo aprendido en el máster y sobre la realidad educativa.	Realicé una buena reflexión sobre lo aprendido en el máster y sobre la realidad educativa. Esta reflexión me ayudó a modificar concepciones previas sobre la educación secundaria y la formación continuada del profesorado.	Realicé una reflexión profunda sobre todo lo aprendido en el máster y sobre la realidad educativa. Esta reflexión me ayudó a hacer una valoración global y me sugirió preguntas que me permitieron una visión nueva y más amplia de la educación secundaria y la formación continuada del profesorado.	10

Nota. Fuente de donde se obtuvo la tabla 1 para autoevaluación es https://www.clubensayos.com/ La calificación final global (sobre 1,5) es:

1.5

8. ANEXOS

Anexo 1. Ejercicios de repaso propuestos en la sesión 1.

Literal 1. Operaciones con radicales. Ejercicios de 1 al 5.

Literal 5. Operaciones con polinomios. Ejercicios del 17 al 20.

REPASO Y REVISIÓN DE CONTENIDOS

1 Operaciones con radicales

1. **Simplifica** los siguientes radicales; **extrae** los factores posibles fuera del radical:

a. $3^2\sqrt{5^3 a^2 b^4}$ c. $-12\sqrt{2^7 a^7}$

b. $\sqrt{7 \cdot a^{10} b^9}$ d. $\frac{16}{5}\sqrt{\frac{25}{2}}$

2. **Efectúa.**

a. $(2+\sqrt{7})\cdot\sqrt{3}$ c. $\sqrt{7}\cdot(9+\sqrt{2})$

b. $\sqrt{11}\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{3})$ d. $\sqrt{5}\cdot(3+\sqrt{5})$

3. **Racionaliza.**

a. $\frac{6}{\sqrt[11]{a^7}}$ b. $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

4. **Efectúa** las siguientes operaciones con radicales, simplifica el resultado cuando sea posible.

a. $\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $\sqrt{\frac{972}{2}}+\sqrt{27}-\frac{-3}{2\sqrt{27}}$

c. $\frac{\pi}{5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{5\sqrt{5}}{\frac{25}{\pi}}+3\pi$

d. $2\sqrt{21}+\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}+1}{\sqrt{9}}$

5. **Calcula.**

$9\cdot\sqrt{21}-3\cdot(\sqrt{21}+8\sqrt{21})-(3\sqrt{21}+\sqrt{21})$

2 Error

6. Una aproximación por truncamiento del número 4,56789 es 4,56. **Halla** el error absoluto y el error relativo.

7. A partir de un mapa, hemos calculado que la distancia en línea recta entre Córdoba y Buenos Aires, en Argentina, es aproximadamente de 650 km, cuando en realidad es de 648,29 km. ¿Qué error absoluto hemos cometido? ¿Cuál es el error relativo?

8. Si un año luz corresponde a unos $9{,}46\cdot10^{12}$ km, **expresa** el error absoluto del ejercicio anterior en metros, **utiliza** la notación científica.

9. Medimos experimentalmente con una técnica propia la distancia a una estrella del sistema solar y descubrimos que es de 6 años luz, cuando en realidad sabemos que es de 6,1 años luz. **Calcula** el error absoluto y el error relativo que hemos cometido.

10. La distancia media entre Neptuno y el Sol es de 30,07 unidades astronómicas (UA). **Exprésala** en kilómetros, **utiliza** la notación científica.

11. **Halla** el valor que se atribuye al diámetro del Sol. Si realizamos una medida experimental y cometemos un error relativo del 1% por encima de la medida encontrada en nuestras fuentes de información, ¿qué medida habremos llevado a cabo? **Exprésala** en kilómetros y en años luz.

12. Medimos la distancia entre el Sol y un planeta, y obtenemos 0,000 60 UA, cuando en realidad se sabe que la distancia exacta es de 0,000 57 UA. (1 UA = $1{,}496\cdot10^8$ km).

a. **Calcula** el error absoluto y el error relativo cometidos.

b. **Expresa** el error absoluto en kilómetros, **utiliza** la notación científica.

11

3 Notación científica

13. **Calcula:**

a. $720\cdot10^{-3}+0{,}05\cdot10^{2}-0{,}72$

b. $(1{,}5\cdot10^{4}+50\cdot10^{2}):7{,}5\cdot10^{-12}$

14. **Efectúa** las operaciones y **expresa** el resultado en notación científica:

a. $(3{,}2\cdot10^{12}+16\cdot10^{9}\cdot5000\cdot10^{6})+0{,}62\cdot10^{10}$

b. $(72\cdot10^{4}\cdot0{,}0012)\cdot0{,}0000051$

4 Intervalos

15. **Escribe** de forma simbólica y **representa** gráficamente estos dos intervalos:

a. Números reales mayores o iguales que -6 y menores o iguales que -3.

b. Números reales mayores que -2.

16. **Calcula** el intervalo común a cada una de las siguientes parejas de intervalos:

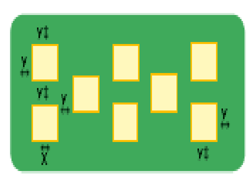
a. (-6, 2) y (-2, 3] d. [6, 9) y [6, 7]

b. (-3, 5] y (0, 3] e. [-5, -3) y (-4, -3]

c. [0, 6] y (1, 4] f. (-11, 1) y (0, 1)

5 Operaciones con polinomios

17. Disponemos del siguiente tapiz.



—**Escribe** la expresión algebraica de:

a. El área total del tapiz

b. El área de color verde

c. El área de color amarillo

18. **Completa** el siguiente cuadrado mágico. La suma debe ser: $15x^2+3$

$2(x^2-1)$		
	$5x^2+1$	
$(2x)^2$		$4(2x^2+1)$

19. **Reescribe** las expresiones siguientes, **usa** las identidades notables:

a. $9+6x+x^2=(\ldots+\ldots)^2$

b. $y^2-2yx+x^2=(\ldots-\ldots)^2$

c. $\ldots^2-4\ldots+\ldots^2=(2a-b)^2$

d. $9y^2+6yx+x^2=(\ldots+\ldots)^2$

e. $9-x^2=(\quad)(3\ldots x)$

f. $9y^2-4x^2=$

20. Dados los polinomios:

$A(x)=\frac{3}{5}x^3-\frac{1}{10}x^2+x-\frac{3}{2}$

$B(x)=5x^4+105x-\frac{7}{2}$

$C(x)=\frac{2}{5}x^3-x-1$

Realiza las siguientes operaciones:

a. $A(x)-B(x)$

b. $A(x)\cdot C(x)-x^2\cdot B(x)$

c. $[A(x)+B(x)]\,x+C(x)$

6 Factorización

21. **Factoriza** estos polinomios.

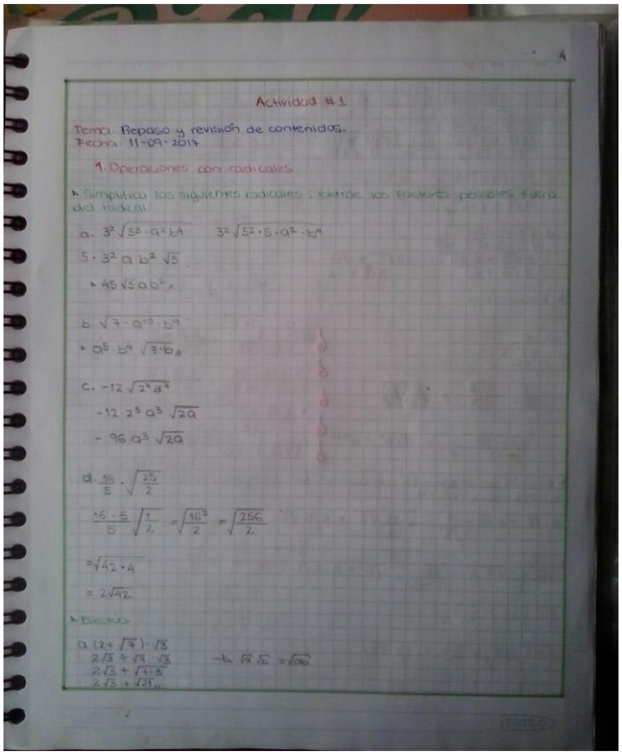
a. x^3+x^2-9x-9

b. $5x^3+15x^2-65x-195$

c. $5x^3+5x^2-20x-20$

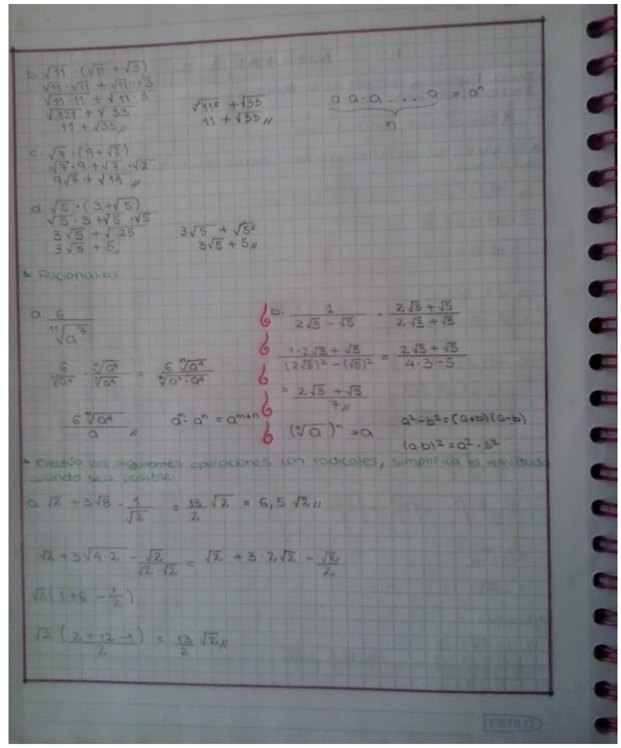
d. $\frac{1}{8}m^3-\frac{27}{64}n^3$

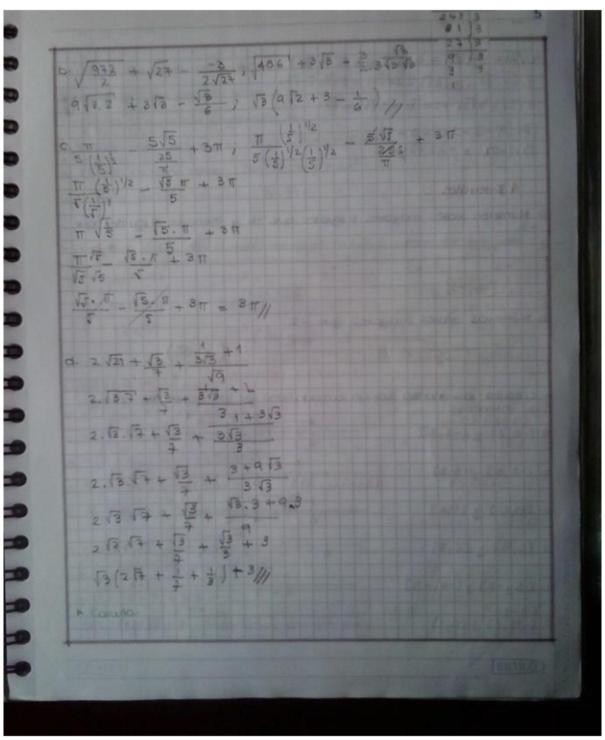
12

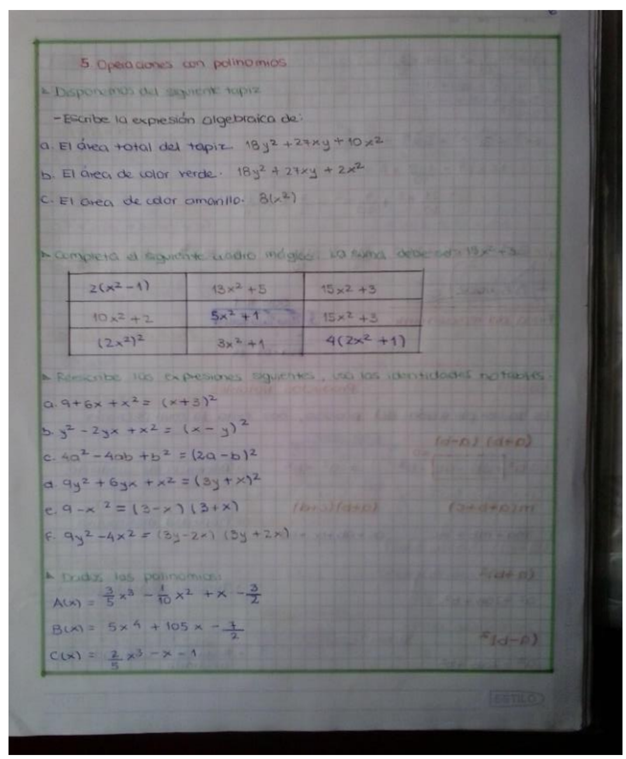

Actividad #1

Tema: Repaso y revisión de contenidos.
Fecha: 11-09-2017

1. Operaciones con radicales


Racionaliza




5. Operaciones con polinomios

- Escribe la expresión algebraica de:

a. El área total del tapiz: $18y^2+27xy+10x^2$

b. El área de color verde: $18y^2+27xy+2x^2$

c. El área de color amarillo: $8(x^2)$

$2(x^2-1)$	$13x^2+5$	$15x^2+3$
$10x^2+2$	$5x^2+1$	$15x^2+3$
$(2x^2)^2$	$3x^2+1$	$4(2x^2+1)$

a. $9+6x+x^2=(x+3)^2$

b. $y^2-2yx+x^2=(x-y)^2$

c. $4a^2-4ab+b^2=(2a-b)^2$

d. $9y^2+6yx+x^2=(3y+x)^2$

e. $9-x^2=(3-x)(3+x)$

f. $9y^2-4x^2=(3y-2x)(3y+2x)$

$A(x)=\frac{3}{5}x^3-\frac{1}{10}x^2+x-\frac{3}{2}$

$B(x)=5x^4+105x-\frac{1}{2}$

$C(x)=\frac{2}{5}x^3-x-1$

Anexo 2. Evaluación Diagnóstica realizada por los alumnos en la sesión 1.

UNIDAD EDUCATIVA FISCOMISIONAL DON BOSCO

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

RESULTADO

NOMBRE:

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS **GRADO / CURSO:** 1° BACHILLERATO

FECHA:

"Lo que con mucho trabajo se adquiere, más se ama." Aristóteles.

INDICACIONES GENERALES: La evaluación escrita es personal, lea detenidamente las preguntas, utilizar esferográfico de tinta azul, no tachar, manchar ni utilizar corrector.

Subraye la respuesta correcta según corresponda a cada número una letra. Leyes de los exponentes y radicales (2,5 puntos)

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\boldsymbol{a^n}$
$a \cdot a \cdot a \cdots a\ (n\ veces)$	$\sqrt[n]{a \cdot b}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$	$a^n \cdot b^n$
$(a \cdot b)^n$	$\sqrt[n]{a^n}$

1d, 2a, 3b, 4c

1a, 2b, 3c, 4d

1b, 2a, 3d, 4c

1b, 2c, 3d, 4a

En cada ejercicio se evaluará lo siguiente por (7,5p)

PROCEDIMIENTO	Utiliza las leyes de exponentes y radicales para resolver el ejercicio	1p
SEÑALA LA RESPUESTA	Obtiene la respuesta correcta	0.25p
TOTAL		1.25P

Simplifica los siguientes radicales; extrae los factores posibles fuera del radical

$$\sqrt{8 \cdot x^8 \cdot y^9} =$$

$\frac{16}{6}\sqrt{\frac{36}{4}} =$

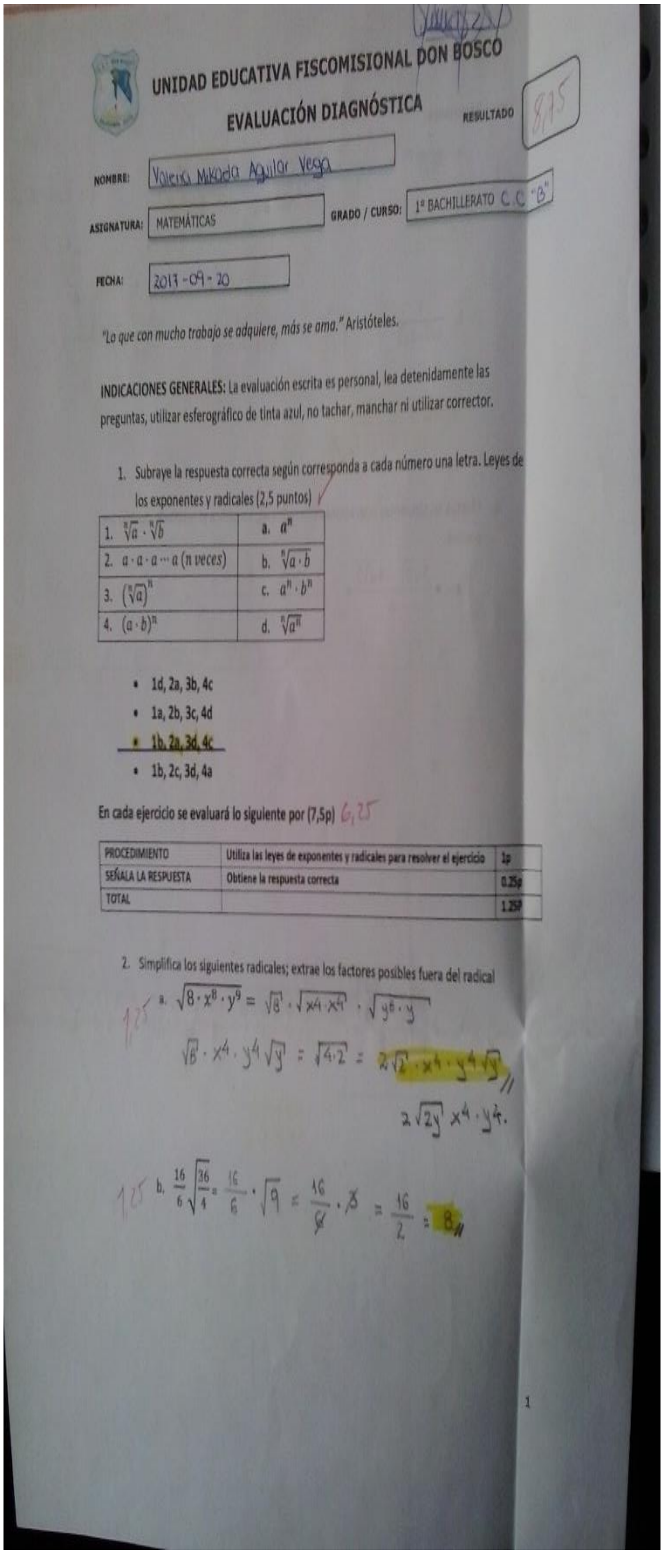
Racionaliza.

$$\frac{7}{\sqrt[12]{6^5}} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} =$$

Efectúa las siguientes operaciones con radicales, simplifica el resultado cuando sea posible.

- $\frac{3\sqrt{27} \cdot 4\sqrt{12}}{6} =$
- $\sqrt{\frac{(0,2^{-3}) : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}}{2}}$



UNIDAD EDUCATIVA FISCOMISIONAL DON BOSCO

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

RESULTADO 8,75

NOMBRE: Valeria Mikaela Aguilar Vega

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS

GRADO / CURSO: 1° BACHILLERATO C.C "B"

FECHA: 2017-09-20

"Lo que con mucho trabajo se adquiere, más se ama." Aristóteles.

INDICACIONES GENERALES: La evaluación escrita es personal, lea detenidamente las preguntas, utilizar esferográfico de tinta azul, no tachar, manchar ni utilizar corrector.

1. Subraye la respuesta correcta según corresponda a cada número una letra. Leyes de los exponentes y radicales (2,5 puntos)

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	a. a^n
2. $a\cdot a\cdot a\cdots a$ (n veces)	b. $\sqrt[n]{a\cdot b}$
3. $(\sqrt[n]{a})^n$	c. $a^n\cdot b^n$
4. $(a\cdot b)^n$	d. $\sqrt[n]{a^n}$

- 1d, 2a, 3b, 4c
- 1a, 2b, 3c, 4d
- 1b, 2a, 3d, 4c
- 1b, 2c, 3d, 4a

En cada ejercicio se evaluará lo siguiente por (7,5p) 6,25

PROCEDIMIENTO	Utiliza las leyes de exponentes y radicales para resolver el ejercicio	1p
SEÑALA LA RESPUESTA	Obtiene la respuesta correcta	0.25p
TOTAL		1.25P

2. Simplifica los siguientes radicales; extrae los factores posibles fuera del radical

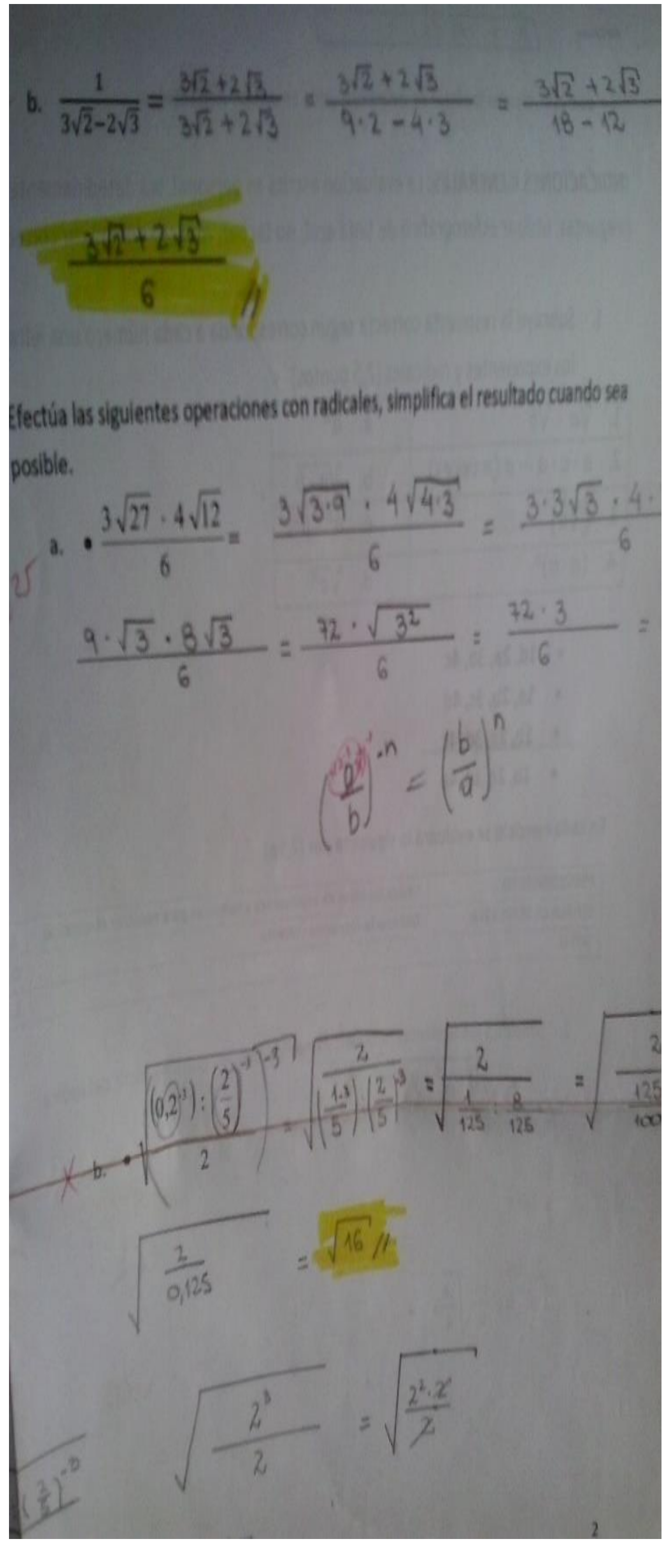
1,25 a. $\sqrt{8\cdot x^8\cdot y^9} = \sqrt{8}\cdot\sqrt{x^4\cdot x^4}\cdot\sqrt{y^8\cdot y}$

$\sqrt{8}\cdot x^4\cdot y^4\sqrt{y} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}\cdot x^4\cdot y^4\sqrt{y}$ //

$2\sqrt{2y}\, x^4\cdot y^4.$

1,25 b. $\frac{16}{6}\sqrt{\frac{36}{4}} = \frac{16}{6}\cdot\sqrt{9} = \frac{16}{6}\cdot 3 = \frac{16}{2} = 8$ //

1



b. $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{9\cdot 2-4\cdot 3} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18-12}$

$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ //

Efectúa las siguientes operaciones con radicales, simplifica el resultado cuando sea posible.

1,25 a. $\frac{3\sqrt{27}\cdot 4\sqrt{12}}{6} = \frac{3\sqrt{3\cdot 9}\cdot 4\sqrt{4\cdot 3}}{6} = \frac{3\cdot 3\sqrt{3}\cdot 4\cdot}{6}$

$\frac{9\cdot\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3}}{6} = \frac{72\cdot\sqrt{3^2}}{6} = \frac{72\cdot 3}{6} =$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

b. $\sqrt{\left(\frac{(0{,}2^{-1}):\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}{2}\right)^{-3}} = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{1\cdot 3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{125}\cdot\frac{8}{125}}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{125}{100}}}$

$\sqrt{\frac{2}{0{,}125}} = \sqrt{16}$ //

$\sqrt{\frac{2^3}{2}} = \sqrt{\frac{2^2\cdot 2}{2}}$

2

Anexo 3. Productos y cocientes notables del Algebra de Mancill páginas 164 y 175

CAPÍTULO 7.

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES.

64. Productos notables.

Así como en Aritmética se hace prácticamente indispensable aprender de memoria las tablas de multiplicar, en Álgebra hay ciertos productos simples que se presentan con tanta frecuencia que conviene memorizarlos, para no tener necesidad de efectuar las multiplicaciones correspondientes repetidas veces.

Además, estos productos especiales, llamados también *notables*, proporcionan los tipos más elementales de expresiones algebraicas que pueden ser factorizadas (o descompuestas en factores), como veremos en el capítulo próximo.

He aquí una relación de los productos más importantes:

64-1 $m(a+b+c) = ma + mb + mc$

64-2 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

64-3 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

64-4 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

64-5 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

64-6 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

64-7 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

64-8 $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

64-9 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

64-10 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

64-11 $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

64-12 $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Todos estos productos pueden ser obtenidos fácilmente sin más que realizar las multiplicaciones correspondientes. Varios de ellos figuran en los ejemplos ilustrativos o en los ejercicios propuestos del capítulo 5.

www.opentor.com 175

65. Cocientes notables.

De los productos notables estudiados anteriormente resultan cocientes correspondientes que llamaremos también *notables*. No todos ellos tienen suficiente interés, por lo que nos limitaremos a consignar a continuación los más importantes:

65-1 $\dfrac{ma + mb + mc}{m} = a + b + c$

65-2 $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b} = a + b$

65-3 $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{a-b} = a - b$

65-4 $\dfrac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$

65-5 $\dfrac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b$

65-6 $\dfrac{a^3 + b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$

65-7 $\dfrac{a^3 - b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$.

He aquí un ejemplo ilustrativo de aplicación de cada uno de los anteriores cocientes notables.

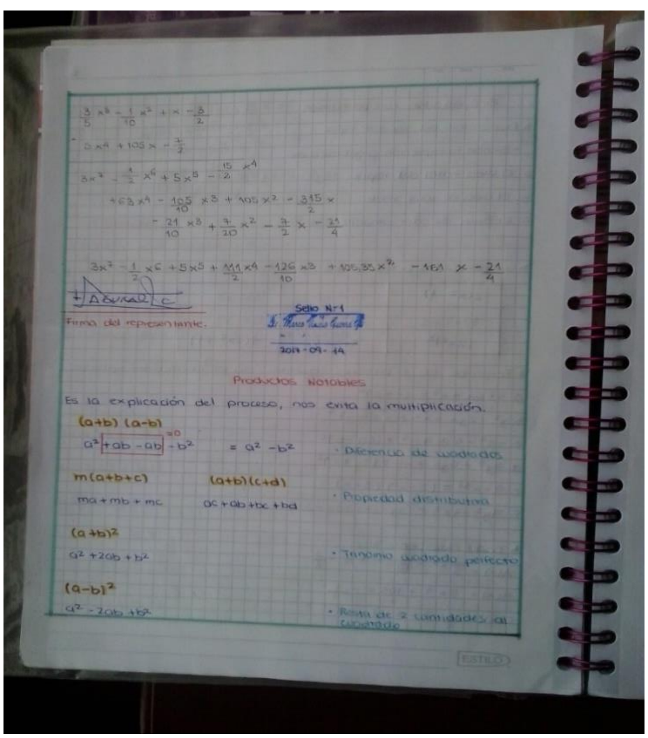
Ejemplos.

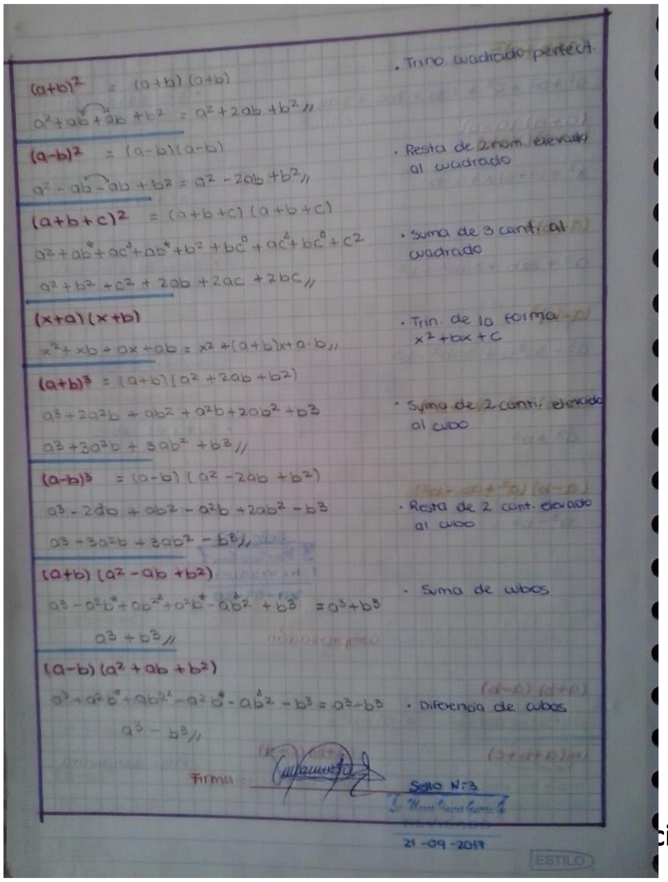
1. $\dfrac{6x^2 + 9xy - 12xz}{3x} = 2x + 3y - 4z$

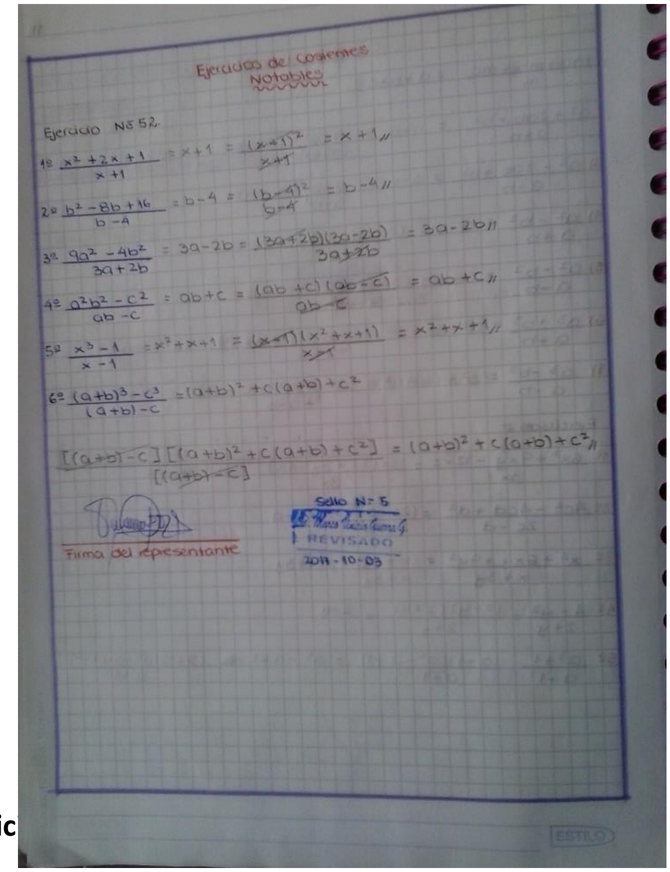
2. $\dfrac{x^2 + 6xy + 9y^2}{x + 3y} = x + 3y$

3. $\dfrac{4c^2 - 4cd + d^2}{2c - d} = 2c - d$

4. $\dfrac{m^2 - 9}{m + 3} = m - 3$







 181

el binomio $x^4 - 16$ no está completamente descompuesto en factores, ya que el factor $x^2 - 4$ no es primo sino compuesto. Escribiendo

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

se tiene entonces el binomio $x^4 - 16$ completamente descompuesto en factores.

En lo que sigue, cuando propongamos descomponer en factores una expresión algebraica, se entenderá que se pide descomponerla en factores completamente.

67. Factor común.

Invirtiendo el producto notable 64-1 se tiene

$$ma + mb + mc = m(a + b + c)$$

que nos dice que cuando los términos de un polinomio tienen un factor común m, el polinomio es igual al producto de este factor por el polinomio cuyos términos se obtienen dividiendo por m los términos del polinomio dado.

La operación que consiste en pasar del primer miembro al segundo miembro de la igualdad escrita arriba se llama *sacar factor común.*

Ejemplos.

$$2x^2 + 4xy + 6xz = 2x(x + 2y + 3z)$$
$$ac^2 - cx^2 + cy = c(ac - x^2 + y)$$
$$a^2b^2c^2 - a^3b^2c^3 - a^2b^3c = a^2b^2c(c - ac^2 - b)$$
$$6x^2y + 3xy - 9xy^2 = 3xy(2x + 1 - 3y)$$
$$(x + y)a + (x + y)b + (x + y)c = (x + y)(a + b + c).$$

En el primero de los ejemplos anteriores $m = 2x$; en el último ejemplo es $m = x + y$.

Ejercicio 54.

Descomponer en factores:

1º) $a^2 - 2a$	2º) $x^2 + x$
3º) $6x^2 - 3x$	4º) $ay - by$
5º) $a^2 + ab^2$	6º) $x^3 + 5x$
7º) $x^2y^2 - xy^3$	8º) $2x^3 - 4x^2 + 4x$

182

9º) $x^3 + x^2 + 2x$	10º) $a^3 - 3a^2 + a$
11º) $5p^2q - 10pq^2 + 5p^2q^2$	12º) $2b^3 - 8b^2 + 4b$
13º) $x^4 - x^3y + x^2y^2$	14º) $8ab^2 - 4a^2b + 4a^2b^2$
15º) $pqr - p^2qr + pqr^2$	16º) $24x^2 + 16x^4 + 40x^3$
17º) $a^4bx^2 + 2a^3b^3x^3 - a^2b^4x^3$	18º) $t^4 + 3a^2 - t^6$
19º) $x^5 - x^3 + x^2$	20º) $x^2y^3z^4 - 2xy^2z^2 + 3y^2z^3$
21º) $7m^2n^3 + 14m^3n^2 - 21m^3n^4$	22º) $9a^4 - 6a^2x + 3a^3x^2$
23º) $a^2 - a^4 + a^6 - a^8$	24º) $4a^6b^2c^4 + 8a^5b^3c^4 + 12a^6b^4c^3$
25º) $(a + b)x + (a + b)y$	26º) $(m + n)x - (m + n)y$
27º) $(a + b)x + (a + b)y - (a + b)z$	
28º) $(a + 3)x^2 + (a + 3)y^2$	
29º) $(x - y)a^2 + (x - y)b^2 + (x - y)c^2$	
30º) $(a + b + c)x + (a + b + c)y$.	

68. Agrupamiento.

En algunas expresiones los términos pueden ser agrupados de tal manera que factorizando cada grupo quede un factor común complejo en la expresión; se termina entonces la factorización sacando este factor común en la forma estudiada en el apartado anterior. (Véanse el último ejemplo ilustrativo de § 67 y los problemas 25 a 30 del Ejercicio 54).

Así, por ejemplo, si la expresión dada es de la forma

$$ac + bc + ad + bd,$$

y se agrupa el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto, se tiene

$$(ac + bc) + (ad + bd),$$

y sacando factor común en cada grupo:

$$c(a + b) + d(a + b)$$

Como ahora la expresión contiene el factor común $(a + b)$, sacando este factor se obtiene finalmente

$$(a + b)(c + d).$$

(Compárese con 64-2).

EJERCICIO 55.

Descomponer en factores:

1º) $ax+bx+ay+by$	2º) $am-bm+an-bn$
3º) $ap-bp-aq+bq$	4º) $ax-my-ay+mx$
5º) $x^2+xz-bx-bz$	6º) $y^2+ay-by-ab$
7º) $x^2-xy-4x+4y$	8º) $3xy-2xz-3ay+2az$
9º) $ac+2bc-ad-2bd$	10º) $ux+vy-vx-uy$
11º) $3ax-3ay-5bx+5by$	12º) $-2ax-2ay-abx-aby$
13º) $am+6bn+3bm+2an$	14º) $ab-3bm-2am+6m^2$
15º) x^3+x-ax^2-a	16º) x^3+2x^2+4x+8
17º) x^3-3x^2+2x-6	18º) $x^3-4x^2-5x+20$
19º) $2x^4+3x^3-6x^2-9x$	20º) $az^4+bz^3-2az-2b$
21º) m^2-m^3+1-m	22º) $a^2b+ac^2-abd-c^2d$
23º) $2xy-yz+6x^2-3xz$	24º) $abx^2+ab^2c-x^2cy-bc^2y$
25º) $3a^2-7b^2-9a^3+21ab^2$	26º) $1+x-x^2yz-x^3yz$
27º) $ax+bx+ay+by+az+bz$	28º) $ax-bx+cx+ay^2-by^2+cy^2$
29º) $3am+2bm-m^2-6an-4bn+2mn$	
30º) $ax+ay+a-x-y-1.$	

69. Trinomios cuadrados perfectos.

En virtud de 64-3 y 64-4 se tiene

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Según esto, un trinomio es un cuadrado perfecto (igual al cuadrado de un binomio), cuando dos de sus términos son cuadrados perfectos y el tercero es el doble producto de las raíces cuadradas de dichos términos. El trinomio es el cuadrado de una suma o de una diferencia según que el signo del doble producto sea positivo o negativo.

Así, por ejemplo, el trinomio

$$25x^2-20xz+4z^2$$

es un cuadrado perfecto, pues contiene dos términos cuadrados

Anexo 5. Ejercicios 56, 57, 58, 59, 60 y 61 de las páginas 185 a la 197.

 185

perfectos* $25x^2$ y $4z^2$. Las raíces cuadradas, (positivas), de estos términos son $5x$ y $2z$, y su doble producto es

$$2(5x)(2z) = 20xz,$$

el cual coincide con el término medio del trinomio (exceptuando el signo). Como dicho término medio tiene signo negativo, resulta

$$25x^2 - 20xz + 4z^2 = (5x - 2z)^2.$$

Observaremos que para sacar la raíz cuadrada (positiva) de un monomio basta sacar la raíz cuadrada aritmética de su coeficiente y dividir por 2 los exponentes de los factores literales que contenga.

Así, la raíz cuadrada de $49a^2$ es $7a$

y la de $64a^4b^6$ es $8a^2b^3$.

Comprobación: $(7a)^2 = 7a \cdot 7a = 49a^2$

$(8a^2b^3)^2 = 8a^2b^3 \cdot 8a^2b^3 = 64a^4b^6$.

Nótese que $-7a$ es también raíz cuadrada de $49a^2$ ya que $(-7a)^2 = 49a^2$. En general, todo monomio cuadrado perfecto tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. Pero en la descomposición en factores de un trimonio cuadrado perfecto basta considerar los valores positivos, pues los negativos conducen a descomposiciones equivalentes.

Así, por ejemplo,

$$9a^2 + 6ab + b^2 = (3a + b)^2 = (3a + b)(3a + b)$$
$$= (-3a - b)^2 = (-3a - b)(-3a - b).$$

Otros ejemplos.

1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$
2. $a^6 - 22a^3 + 121 = (a^3 - 11)^2$
3. $(x - y)^2 + 4(x - y)z + 4z^2 = [(x - y) + 2z]^2 = (x - y + 2z)^2$.

Ejercicio 56.

Descomponer en factores:

1º) $9a^2 + 6ab + b^2$ 2º) $a^2 - 4ab + 4b^2$
3º) $x^2 + 8xy + 16y^2$ 4º) $x^2 - 10xz + 25z^2$

* Nótese que el signo de estos términos ha de ser siempre positivo.

186

5º) $4a^2 - 12ac + 9a^2$ 6º) $a^2 - 2a + 1$
7º) $b^2 + 2b + 1$ 8º) $x^2 - 14x + 49$
9º) $25 - 10y + y^2$ 10º) $100x^2 + 20x + 1$
11º) $81a^2 - 90ab + 25b^2$ 12º) $64 - 48z + 9z^2$
13º) $121a^2 + 88ax + 16x^2$ 14º) $1 - 12m + 36m^2$
15º) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ 16º) $a^2 - 0{,}5a + 0{,}0625$
17º) $x^2y^2 - 4xyz + 4z^2$ 18º) $4a^2 + 28abc + 49b^2c^2$
19º) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 20º) $a^4 - 10a^2b^2 + 25b^4$
21º) $a^6 + 6a^3 + 9$ 22º) $a^6 - 4a^3x^3 + 4x^6$
23º) $z^8 + 2z^4 + 1$ 24º) $a^4b^6 - 2a^2b^3c + c^2$
25º) $4a^4 - 36a^2b^2 + 81b^4$ 26º) $0{,}01 - 0{,}2x^2 + x^4$
27º) $(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$ 28º) $(x + y)^2 + 6(x + y) + 9$
29º) $16 - 8(x - z) + (x - z)^2$
30º) $(a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2$

70. Diferencia de dos cuadrados.

Invirtiendo el producto notable 64-6 se tiene:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Por tanto, la diferencia de dos cuadrados se descompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases de estos cuadrados.

Ejemplos.

$$85^2 - 15^2 = (85 + 15)(85 - 15) = 100 \times 70 = 7\,000$$
$$9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$$
$$100a^2b^2 - 49c^2 = (10ab + 7c)(10ab - 7c)$$
$$x^4 - \frac{1}{4} = (x^2 + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2})$$

Las bases de los cuadrados pueden ser también expresiones complejas.

Ejemplos.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y + z)(x + y - z)$$
$$9a^2 - (2b - 3c)^2 = [3a + (2b - 3c)][3a - (2b - 3c)]$$
$$= (3a + 2b - 3c)(3a - 2b + 3c)$$

 187

$$(a - b)^2 - (c - d)^2$$
$$= [(a - b) + (c - d)][(a - b) - (c - d)]$$
$$= (a - b + c - d)(a - b - c + d)$$
$$(2x + y - 3z)^2 - (x - y + 2z)^2$$
$$= (2x + y - 3z + x - y + 2z)(2x + y - 3z - x + y - 2z)$$
$$= (3x - z)(x + 2y - 5z).$$

Sucede en algunos ejemplos que uno de los factores obtenidos al aplicar el método anterior es también una diferencia de cuadrados. Se procede entonces a descomponerlo a su vez en factores siguiendo el mismo método.

Ejemplos.

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$
$$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$
$$a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$$
$$= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$
$$= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$
$$(x + y)^4 - 16 = [(x + y)^2 + 4][(x + y)^2 - 4]$$
$$= [(x + y)^2 + 4][x + y + 2][x + y - 2].$$

Ejercicio 57.

Descomponer en factores:

1º) $80^2 - 20^2$ 2º) $a^2 - 4b^2$
3º) $b^2 - 1$ 4º) $9x^2 - y^2$
5º) $4a^2 - 9c^2$ 6º) $4x^2 - 25y^2$
7º) $16 - 81a^2$ 8º) $100 - 36x^2$
9º) $x^2 - 0{,}25$ 10º) $a^2 - 0{,}0001b^2$
11º) $a^2b^2 - 9x^2$ 12º) $4a^4 - b^2c^2$
13º) $a^6 - b^4$ 14º) $x^8 - 49y^6$
15º) $400a^4 - b^2$ 16º) $4x^8 - y^{10}$
17º) $121m^6 - 900n^{12}$ 18º) $64x^{14} - 0{,}36a^{10}$
19º) $4x^2y^2z^2 - b^8$ 20º) $144x^2y^4 - z^6$
21º) $a^4 - x^4$ 22º) $(a + b)^2 - c^2$
23º) $16 - b^4$ 24º) $(a - b)^2 - c^2$

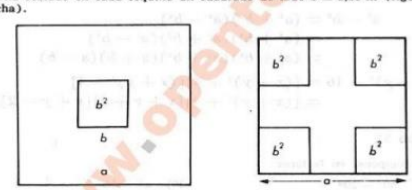
188

25º) $1 - x^8$ 26º) $x^2 - (y + z)^2$
27º) $a^8 - 256$ 28º) $x^2y^2 - (a - z)^2$
29º) $a^{16} - 1$ 30º) $(2x - y)^2 - z^2$
31º) $x^4 - y^8$ 32º) $(x + y)^2 - (a - b)^2$
33º) $a^{12} - 81$ 34º) $(a - 2b)^2 - (2a + b)^2$
35º) $(x + y)^4 - 1$ 36º) $(2a + 1)^2 - (a + 2)^2$
37º) $(x - 2)^2 - (a + x - 3)^2$ 38º) $(x - y + z)^2 - (x + y - z)^2$
39º) $(2a + 2b - c)^2 - (a - b + 3c)^2$
40º) $(a^2 - a + 1)^2 - (a^2 + a + 1)^2$
41º) En la figura de la izquierda se tiene

$a = 7{,}7$ cm y $b = 2{,}3$ cm.

Hallar el área comprendida entre los dos cuadrados evaluando: 1) la expresión $a^2 - b^2$; 2) la expresión $(a + b)(a - b)$.

42º) Hallar el área que queda de un cuadrado de lado $a = 7{,}5$ m al cual se le ha cortado en cada esquina un cuadrado de lado $b = 2{,}25$ m (figura de la derecha).



71. Combinación de cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados.

Algunos polinomios pueden ser expresados como diferencia de cuadrados si se agrupan convenientemente los términos que formen cuadrados perfectos. Entonces se descomponen en factores como en el parágrafo 70.

Ejemplos.

1. $a^2 + 2ab + b^2 - 25m^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 25m^2$
$= (a + b)^2 - 25m^2$
$= (a + b + 5m)(a + b - 5m).$

2. $a^2 - x^2 - y^2 + 2xy = a^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$

$$= a^2 - (x-y)^2$$

$$= (a + x - y)(a - x + y).$$

3. $4a^2 - c^2 - 6cd + b^2 - 9d^2 - 4ab$

$$= (4a^2 - 4ab + b^2) - (c^2 + 6cd + 9d^2)$$

$$= (2a - b)^2 - (c + 3d)^2$$

$$= (2a - b + c + 3d)(2a - b - c - 3d)$$

Ejercicio 58.

Descomponer en factores:

1º) $a^2 - 2ab + b^2 - 4x^2$	2º) $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$
3º) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$	4º) $4a^2 - 4ab + b^2 - c^2$
5º) $9a^2 - 4c^2 + 6ab + b^2$	6º) $4x^2 - 12xy - 16a^2 + 9y^2$
7º) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$	8º) $x^2 + 2yz - z^2 - z^2$
9º) $1 - a^2 - 4ax - 4x^2$	10º) $25 - m^2 - n^2 + 2mn$
11º) $6xy - 9x^2 - y^2 + z^2$	12º) $30ab - 25a^2 + 4c^2 - 9b^2$
13º) $100x^2 - y^2 - 14yz - 49z^2$	14º) $48ax - 36a^2 + y^2 - 16x^2$

15º) $a^2 + b^2 - 2ab + 2cd - c^2 - d^2$

16º) $x^2 - y^2 + z^2 - t^2 - 2xz - 2yt$

17º) $4a^2 - 4b^2 + c^2 - 4ac + 4b - 1$

18º) $9 - 6a - b^2 + a^2 - 10bc - 25c^2$

19º) $25a^2 - 16y^2 + 9x^2 + 30ax - z^2 - 8yz$

20º) $4a^2 + 9m^2 - 20bc - 12am - 4c^2 - 25b^2$

21º) $x^2 - y^2 - 2x - z^2 + 1 - 2yz$

22º) $6ax - 4y^2 + a^2 + 9x^2 - y^4 - 4$

23º) $1 - 2x^2 + x^4 - 4y^2 - 12yz - 9z^2$

24º) $25x^4 + 12x^3 + 10a^2x^2 - 9x^6 + a^4 - 4$

25º) $x^2y^2 - z^4 - 2xy + 1 - 4z^2b^2 - 4b^4$

26º) $x^2 - 2xz - 1 - y^2 + 2y + z^2$

27º) $x^4 + y^4 - a^4 - b^4 - 2(x^2y^2 + a^2b^2)$

28º) $9a^4 - 8a^3 + 6a^2b^2 - 16a^6 - 1 + b^4$

29º) $4xy - 4 - a^2 - 4a + x^2 + 4y^2$

30º) $2a^3x^3 - x^6 - a^6 + 2b^3y^3 + b^6 + y^6$.

es decir: una suma de cuadrados podrá transformarse en una diferencia de cuadrados y, por tanto, descomponerse en factores, siempre que el término $2ab$ resulte un cuadrado perfecto.

Así, en el ejemplo anterior $x^4 + 4$, se tiene $a = x^2$, $b = 2$ y como $2ab = 4x^2$ es un cuadrado perfecto, la factorización es posible.

4. $x^4 - 2x^2yz - y^4 - y^2z^2 - z^4$

Esta expresión contiene dos cuadrados perfectos incompletos, como se ve escribiéndola en la forma

$$(x^4 - 2x^2yz + \qquad) - (y^4 + y^2z^2 + z^4).$$

Agregando y^2z^2 en cada paréntesis (lo cual equivale a sumar y restar y^2z^2) resulta

$$(x^4 - 2x^2yz + y^2z^2) - (y^4 + 2y^2z^2 + z^4) =$$

$$= (x^2 - yz)^2 - (y^2 + z^2)^2 =$$

$$= (x^2 - yz + y^2 + z^2)(x^2 - yz - y^2 - z^2).$$

Ejercicio 59.

Descomponer en factores:

1º) $1 + x^2 + x^4$	2º) $a^4 + a^2b^2 + b^4$
3º) $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$	4º) $25x^4 + x^2y^2 + y^4$
5º) $16a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$	6º) $9a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$
7º) $9x^4 + 26x^2 + 25$	8º) $m^4 - 17m^2 + 16$
9º) $a^4 - 7a^2b^2 + b^4$	10º) $x^4 - 19x^2y^2 + 9y^4$
11º) $4 + a^4$	12º) $x^4 + 64$
13º) $64x^4 + y^8$	14º) $b^4 + 1024$
15º) $100x^4 + 59x^2y^2 + 49y^4$	16º) $36a^4 - 69a^2b^2 + 25b^4$
17º) $a^4 + 31a^2x^2 + 400x^4$	18º) $a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$
19º) $a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2bc - b^2c^2$	20º) $1 + 2xy - x^2y^2 - x^4 - y^4$.

73. Trinomios de la forma $x^2 + px + q$.

En § 64-7 vimos que

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Por tanto, si podemos encontrar dos números a y b cuya suma algebraica sea p y cuyo producto sea q, esto es, tales que

entre ellos hay que escoger la pareja cuya suma algebraica sea -5. Por eliminación sucesiva se obtiene $+3$ y -8. Nótese que siendo la suma negativa, el número de mayor valor absoluto ha de ser negativo.

Por tanto, resulta

$$x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8).$$

5. $x^2 - 8xy + 15y^2$.

Escrito este trinomio en la forma $x^2 - (8y)x + 15y^2$ se nota que el problema se reduce a hallar dos monomios cuyo producto sea $15y^2$ y cuya suma sea $-8y$. Estos monomios son $-3y$ y $-5y$. Por tanto:

$$x^2 - 8xy + 15y^2 = (x - 3y)(x - 5y).$$

Compruébese efectuando la multiplicación indicada en el segundo miembro.

No siempre existen dos números racionales cuya suma y producto sean dos números dados. Más adelante (en § 79) daremos un método para reconocer si un trimonio es descomponible en factores (con coeficientes racionales), e indicaremos también un método general para efectuar esta descomposición (cuando ella es posible).

Ejercicio 60.

Descomponer en factores:

1º) $x^2 + 7x + 12$	2º) $x^2 + 8x + 15$
3º) $x^2 + 9x + 20$	4º) $x^2 + 7x + 10$
5º) $x^2 - 5x + 6$	6º) $x^2 - 9x + 20$
7º) $a^2 - 3a + 2$	8º) $a^2 - 6a + 5$
9º) $b^2 + 3b - 10$	10º) $b^2 + 4b - 5$
11º) $y^2 + 3y - 18$	12º) $z^2 + 3z - 4$
13º) $x^2 - x - 6$	14º) $x^2 - 2x - 15$
15º) $a^2 - 5a - 14$	16º) $a^2 - 2a - 24$
17º) $c^2 + 9c + 8$	18º) $c^2 - 9c + 8$
19º) $x^2 - 5x - 36$	20º) $x^2 + 9x - 22$
21º) $a^2 - 15a + 36$	22º) $a^2 + 19a + 60$
23º) $m^2 + 13m - 90$	24º) $c^2 - 7c - 120$
25º) $x^2 - 7xy + 10y^2$	26º) $x^2 + 7xy + 12y^2$
27º) $a^2 + 4ab - 21b^2$	28º) $a^2 - 2ab - 48b^2$

29º) $a^2 - 20ax + 51x^2$	30º) $y^2 + 10yz - 75z^2$
31º) $a^4 - 11a^2 + 24$	32º) $x^4 - 8x^2 - 33$
33º) $a^2b^2 + 16ab - 36$	34º) $a^2b^2 - 6abc - 72c^2$
35º) $x^2 - 0{,}8x + 0{,}15$	36º) $a^2 + 0{,}29a + 0{,}01$
37º) $a^2x^2 + 5ax - 36$	38º) $a^2x^2 - 6axy - 40y^2$
39º) $c^6 - 20c^3 + 64$	40º) $a^4 - 5a^2 + 4$
41º) $x^4 - 28x^2 + 115$	42º) $x^4 - 23x^2 - 108$
43º) $a^4 + 14a^2b - 120b^2$	44º) $x^2 + 35xy^2 + 150y^4$
45º) $a^2b^2 - 48abc - 100c^2$	46º) $y^2 - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}$
47º) $x^4 - 20x^2y^2 - 96y^4$	48º) $a^6 - 3a^3b - 180b^2$
49º) $x^{2n} - 19x^n - 120$	50º) $a^{2n} + 40a^n + 144$.

74. Trinomios de la forma $mx^2 + px + q$.

Primer método. En virtud de § 64-8 se tiene

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Por tanto, si es posible determinar números a, b, c, d tales que

$$ac = m, \qquad bd = q, \qquad ad + bc = p$$

se tendrá

$$mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d).$$

Cuando los coeficientes m y q contienen pocos factores la determinación de los números a, b, c, d no requiere muchos tanteos y el método es de valor práctico. Es claro que a y c han de ser factores de m y b y d factores de q.

Conviene disponer los números que se ensayan en forma de cuadro, como muestra el esquema siguiente:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ & \times \\ c & d \\ \hline ac & bd \\ \multicolumn{2}{c}{ad+bc} \end{array}$$

y considerando mx como un solo símbolo se procede a descomponer el numerador por el método explicado en § 73, es decir, buscando dos números que multiplicados den mq y que sumados den p.

Ejemplos.

1. $$4x^2+8x+3=\frac{(4x)^2+8(4x)+12}{4}=$$
$$=\frac{(4x+6)(4x+2)}{4}=$$
$$=\frac{2(2x+3)2(2x+1)}{4}=$$
$$=(2x+3)(2x+1).$$

En el primer paso se multiplica y divide el trinomio por 4. En el segundo, se procede a la descomposición en factores para lo cual se buscan los números que sumados den 8 y que multiplicados den 12. El factor 4 que se introdujo en el numerador aparece ahora repartido entre los factores. Sacando 2 factor común y simplificando se obtiene $(2x+3)(2x+1)$.

2. $$6x^2-7xy-3y^2=\frac{(6x)^2-7(6x)y-18y^2}{6}=$$
$$=\frac{(6x-9y)(6x+2y)}{6}=$$
$$=\frac{3(2x-3y)2(3x+y)}{6}=$$
$$=(2x-3y)(3x+y).$$

Ejercicio 61.

Descomponer en factores:

1º) $2x^2+3x+1$	2º) $2x^2+5x+2$
3º) $2x^2+7x+3$	4º) $3x^2+5x+2$
5º) $4a^2+13a+3$	6º) $2a^2-7a+3$
7º) $2b^2-7b+6$	8º) $6x^2-7x+2$
9º) $6a^2-13a+6$	10º) $4a^2-12a+5$
11º) $4x^2-16x+15$	12º) $2b^2-11b+12$

13º) $6a^2-19a+10$	14º) $24x^2-38x+15$
15º) $4x^2+4x-3$	16º) $4x^2-4x-3$
17º) $2a^2+5a-12$	18º) $12b^2-b-1$
19º) $6a^2+5a-4$	20º) $2x^2+5x-3$
21º) $6x^2-11x-10$	22º) $4a^2+19a-5$
23º) $4b^2-16b+15$	24º) $2x^2-3x-9$
25º) $6x^2-5x-21$	26º) $6x^2y^2+xy-1$
27º) $6x^2-25x-25$	28º) $8y^2-37y-15$
29º) $4x^2+23x-35$	30º) $6x^2+49x-45$
31º) $6x^2-7ax-3a^2$	32º) $2a^2-13ab+6b^2$
33º) $9a^2+6ab-8b^2$	34º) $8x^2+6xy-35y^2$
35º) $10x^2-23xy-5y^2$	36º) $10y^2-21yz-10z^2$
37º) $31xy-5x^2-6y^2$	38º) $2ab-24a^2+15b^2$
39º) $15a^2+8x^2-26ax$	40º) $30x^2-7xy-15y^2$

75. Suma de potencias de exponente impar.

75-1. *Suma de dos cubos.*

En § 64-11 vimos que

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

Por consiguiente,

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Ejemplos.

1. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$
2. $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3=$
$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$
3. $x^3+y^9=x^3+(y^3)^3=(x+y^3)(x^2-xy^3+y^6).$

75-2. *Suma de dos potencias cualesquiera con el mismo exponente impar.*

Invirtiendo el ejemplo III del Ejercicio 51, se tiene

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4);$$

Anexo 6. Ejercicios 63 página 200 ejercicio 64 página 201 los literales pares.

Por tanto:

$$x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2).$$

Pero es a todas luces más ventajoso proceder como en § 70, a saber:

$$x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2).$$

Ejercicio 63.

Descomponer en factores:

1º) x^3-y^3	2º) $a^3-b^3c^3$
3º) a^3-1	4º) x^3-125
5º) y^3-8	6º) $8x^3-125y^3$
7º) x^5-y^5	8º) a^5-32
9º) $32x^5-1$	10º) $243a^5-32b^5$
11º) x^3-y^9	12º) $x^{10}-a^5$.

77. Suma o diferencia de potencias de exponente par.

77-1. *Suma de potencias de exponente par.*

La suma de potencias de exponente par es descomponible en factores (con coeficientes racionales) cuando los exponentes contienen el mismo factor impar, en cuyo caso dicha suma puede expresarse como suma de potencias con el mismo exponente impar, y se aplica la regla estúdiada en § 75.

Ejemplos.

1. $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
2. $a^{12}+b^{12}=(a^4)^3+(b^4)^3=(a^4+b^4)(a^8-a^4b^4+b^8)$
3. $a^{12}+x^6=(a^4)^3+(x^2)^3=(a^4+x^2)(a^8-a^4x^2+x^4)$
4. x^4+y^4, x^8+y^8 etc., no son descomponibles.

77-2. *Diferencia de potencias de exponente par.*

Como ya indicamos en § 76-2, para descomponer en factores una diferencia de potencias de exponente par basta considerarla como una diferencia de cuadrados. Si los factores resultantes admiten a su vez descomposición en factores, se procede a efectuarla hasta que sean primos todos los factores obtenidos.

Ejemplos.

1. $x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
2. $x^8-y^8=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$
$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y).$

Ejercicio 64.

Descomponer en factores:

1º) a^6+b^6	2º) a^6-b^6
3º) x^6+64y^6	4º) x^6-64y^6
5º) $x^{12}+y^{12}$	6º) $x^{12}-y^{12}$
7º) $a^{10}+x^{10}$	8º) $a^{10}-x^{10}$
9º) x^6+1	10º) a^8-1
11º) $x^{20}+y^{20}$	12º) $x^{10}-1$
13º) $x^{12}+y^6$	14º) $x^{12}-y^6$
15º) $a^{12}+729$	16º) $a^{12}-729b^{12}$
17º) $x^6y^6+z^{18}$	18º) $a^{18}-b^6$
19º) $(a+b)^6+c^6$	20º) $a^6-(b+c)^6$.

78. Polinomios que contienen factores de la forma $x+a$*.

Si un polinomio cualquiera con coeficientes enteros, como por ejemplo,

$$kx^3+mx^2+nx+p$$

es divisible por un binomio de primer grado de la forma $x+a$, el número a deberá ser un divisor de p. En efecto, en una división exacta el último término del dividendo es igual al producto del último término del cociente por el último término del divisor. Tendremos, pues, $p=aq$, representando por q el último término del cociente.

Por tanto, si un polinomio contiene factores de la forma $x+a$, el número a habrá que buscarlo entre los divisores (positivos y negativos) de p.

* Antes de estudiar el parágrafo 78, el alumno debe repasar el § 57.

Anexo 7. Ejercicio 68 de repaso del Algebra de Mancill páginas de la 212 a la 215. Los múltiplos de 10.

el trinomio dado es descomponible en factores con coeficientes racionales. Se tiene, efectivamente,

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1).$$

2º) $5x^2 + 3x - 1$.

Aquí se tiene

$$b^2 - 4ac = 9 - 4(5)(-1) = 29.$$

El discriminante es positivo pero no es un cuadrado perfecto. Por tanto, el trinomio no es descomponible en factores con coeficientes racionales, pero sí en factores con coeficientes reales.

3º) $x^2 - xy + y^2$.

Este trinomio ocurre en la descomposición de $x^3 + y^3$ en factores. En este caso se tiene

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3.$$

Por tanto, el trinomio considerado es primo en el sistema de los números reales.

EJERCICIO 67.

Calcular el discriminante y averiguar si los trinomios siguientes admiten factores con coeficientes racionales:

1º) $x^2 - 4x - 5$ — 2º) $x^2 + 2x - 15$
3º) $x^2 - 3x - 18$ — 4º) $x^2 + x + 2$
5º) $x^2 - 3x + 4$ — 6º) $3x^2 - x - 2$
7º) $6x^2 - x - 2$ — 8º) $4x^2 + 13x + 3$
9º) $3x^2 - x - 1$ — 10º) $5x^2 + 6x + 3$
11º) $17x + 12 + 6x^2$ — 12º) $12x^2 - x - 1$
13º) $4z^2 + 7x - 15$ — 14º) $10t^2 - 3t - 15$
15º) $8x^2 + 21x - 9$ — 16º) $x^2 + xy + y^2$
17º) $x^2 - 4xy + 4y^2$ — 18º) $6x^2 + 19xy - 7y^2$
19º) $6x^2 - xy - 35y^2$ — 20º) $15x^2 + 8xz - 16z^2$.

EJERCICIO 68. (REPASO).

Descomponer en factores:

1º) $3a^2 - 5a$ — 2º) $x^3 + x^2y + 2xy^2$
3º) $2x^5 - 4x^2 + 5x^3$ — 4º) $a^4b - a^3b^2 + a^2b^3$
5º) $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ — 6º) $5a^3x + 10a^3x^2 - 20a^3x^3$
7º) $3a^2b^2c^2 - 6abc + 9a^3b^3c^3$ — 8º) $4x^3y^3 - 8x^2y^2z^2 + 12xyz$
9º) $2a^2y + 4a^2y^2 + 8a^2$ — 10º) $6a^2c - 12ac^2 - 3a^2c^2$

11º) $2x^2 - 5xy + 4ax - 10ay$ — 12º) $x^2 + xy - ax - ay$
13º) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ — 14º) $a^4 - a^3 - a + 1$
15º) $1 + 20x^4 - 4x^3 - 5x$ — 16º) $1 + a - a^3mn - a^2mn$
17º) $ax + bx + ay + by + az + bz$ — 18º) $a^2 - ab + ac - a + b - c$
19º) $ax - ay + az + x - y + z$
20º) $x^{2n} + x^{n+3} - x^{n+1} - x^4 \quad (n > 3)$
21º) $a^2 + 6ab + 9b^2$ — 22º) $4x^2 + 4x + 1$
23º) $x^2 - 10x + 25$ — 24º) $1 - 20y + 100y^2$
25º) $121a^2 - 110a + 25$ — 26º) $x^6 + 14x^3 + 49$
27º) $36x^2 - 84xy + 49y^2$ — 28º) $25a^2b^2 - 40abc + 16c^2$
29º) $4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4$ — 30º) $(x + y)^2 - 6a(x + y) + 9a^2$
31º) $a^2 - 9$ — 32º) $x - x^5$
33º) $25 - 100a^2$ — 34º) $a^2b^2 - 16c^2$
35º) $x^2 - \frac{25}{4}y^2$ — 36º) $x^4 - 4y^2$
37º) $3a^5 - 12a^3b^4$ — 38º) $x^8 - 256$
39º) $(x - 3y)^2 - 16z^2$ — 40º) $(x + 2)^2 - (2x - 3)^2$
41º) $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$ — 42º) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$
43º) $9x^2 - 4a^2 + 4a - 1$ — 44º) $1 - a^2 + 6ab - 9b^2$
45º) $2a + c^2 - 1 - a^2$ — 46º) $x^2 + y^2 - 2xy - 2a - a^2 - 1$
47º) $x^2 - 2x + 1 - a^2 + 2ay - y^2$
48º) $a^4 - a^2 - 9 + b^4 - 2a^2b^2 + 6a$
49º) $25x^2 - 1 - 10ax - 4y^2z^2 + a^2 + 4yz$
50º) $a^4 - 2a^2x - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 + x^2$
51º) $b^4 + b^2 + 1$ — 52º) $a^4 - 3a^2x^2 + x^4$
53º) $a^4 + a^2b^2 + 25b^4$ — 54º) $25a^4 + 24a^2b^2 + 16b^4$
55º) $4a^4 + b^4$ — 56º) $x^8 + 64y^8$
57º) $x^2 + 7x + 10$ — 58º) $x^2 - 7x - 8$
59º) $x^2 - 3xy - 4y^2$ — 60º) $a^2 + 4ab - 21b^2$
61º) $5x^2 - 8x + 3$ — 62º) $3x^2 - 2x - 5$
63º) $4a^2 - 4a - 3$ — 64º) $6a^2 - 7ab - 3b^2$
65º) $2x^2 + 5xz + 2z^2$ — 66º) $12a^2 - 7ax - 10x^2$
67º) $a^3 + 125$ — 68º) $8a^3 - 27b^3$
69º) $a^3b^3 + 64$ — 70º) $216 + x^6$
71º) $64x^3 - 343y^9$ — 72º) $x^3y^6 + 1$

73º) $(a + 3)^3 + 8$ — 74º) $x^3 - (y - z)^3$
75º) $(x + y)^3 + (x - y)^3$ — 76º) $(a + 1)^3 - (a - 1)^3$
77º) $64x^6 - y^6$ — 78º) $a^2 - ab - b - 1$
79º) $a^2 - b^2 + a^3 - b^3$
80º) $(x^3 - y^3) - (x - y)^2 + (x^2 - y^2)$
81º) $x^2 - xy + y^2 - x^3 - y^3$ — 82º) $x^3 + x^2 - 3x - 6$
83º) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ — 84º) $x^3 - 4x^2 + 5$
85º) $x^3 + 5x^2 - 6$ — 86º) $x^4 + 3x^3 - 2x + 4$
87º) $x^5 - x$ — 88º) $a^3 - b^3 + a - b$
89º) $a^3 - x^3 - 3ax(a - x)$
90º) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
91º) $a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2)$ — 92º) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$
93º) $a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2$ — 94º) $9m^4 + 3m^2b^2 + 4b^4$
95º) $x^2y^n + 2xy^{n+1} + y^{n+2}$ — 96º) $c^{4n} + c^{3n} + c^{2n} + c^n$
97º) $a^4b^2 - a^2b^4 + 16b^6$ — 98º) $a^2x - 2ax^2 - 2x^2 - x$
99º) $x^6y^9 + z^{12}$ — 100º) $(2x - y)^3 - (x + 2y)^3$
101º) $x^2 + 2xy + y^2 + 2 + 3x + 3y$
102º) $6x^2 - 5xy - 6y^2 - 6xz + 9yz$
103º) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 3x - 4$
104º) $12 + 7(a + b) - 10(a + b)^2$
105º) $16x^{2n} - (y + z)^2$
106º) $4u^2 - 2xy - 12uv - x^2 + 9v^2 - y^2$
107º) $8x^4 + x$
108º) $x^4y^4 + 4$
109º) $a^2x - a^2y + bx^2 - by^2$
110º) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$
111º) $x^3 - 2x^2y + x^2 - 4x - 4 + 8y$
112º) $(m - n)^2 - 2(m - n - 1) - 1$
113º) $2xy - ax - 2yz + az - ay + 2y^2$
114º) $x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$
115º) $12a^3 + 20a^2 - a + 14$
116º) $2a^2 - 5ab + 2b^2 - 3ac + 6bc$
117º) $a + b - c + a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$
118º) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 8x + 24y + 15$
119º) $a^2 + 8ab + 16b^2 - a - 4b - 20$

120º) $9a^2 - 6ab + b^2 - 21x^2 + 12ax - 4bx$
121º) $2ab - 2bc - ad + cd + 2b^2 - bd$
122º) $a^4 - 2a^2xy - x^4 - x^2y^2 - y^4$
123º) $1 + 2ab - a^4 - b^4 - a^2b^2$
124º) $4x^2y^2 + 4y^4 - x^8 - x^4 - 1$
125º) $x^5 + x + 1$.

TEST 8.

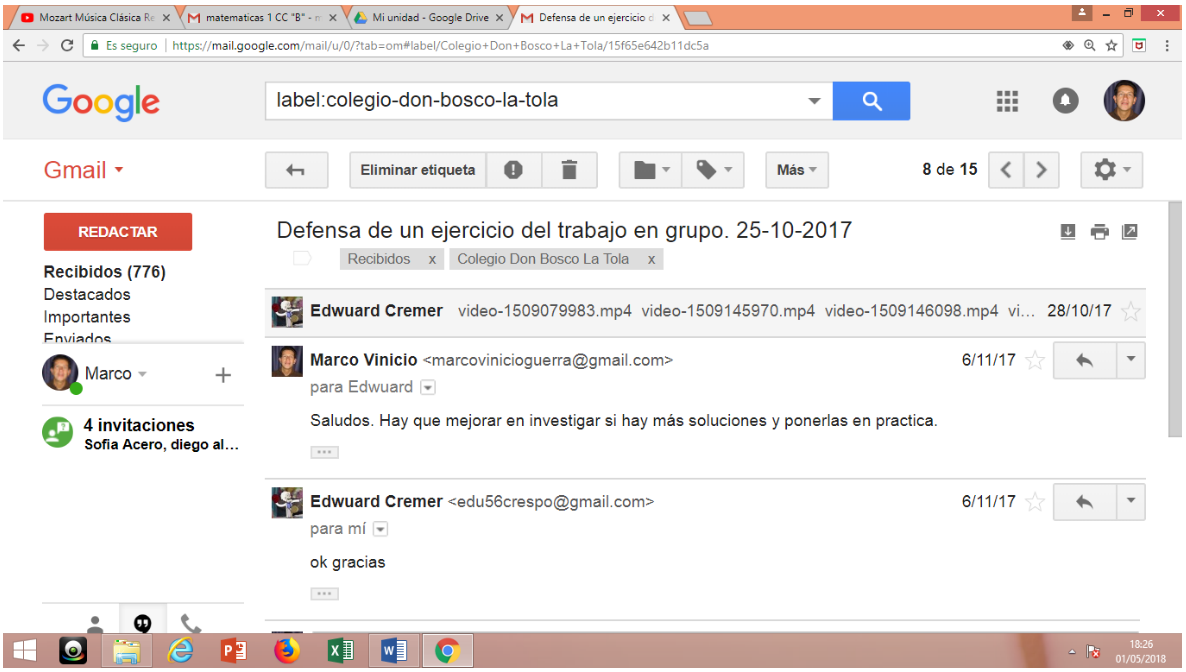
1º) Descomponer en factores:

a) $a^2c - 12abc + 36b^2c$ — b) $a^5 - 81a$
c) $x^2 - 1 + 2y - y^2$ — d) $a^2x - a^2y - b^2y + b^2x$
e) $a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4$ — f) $x^6 - 64y^6$

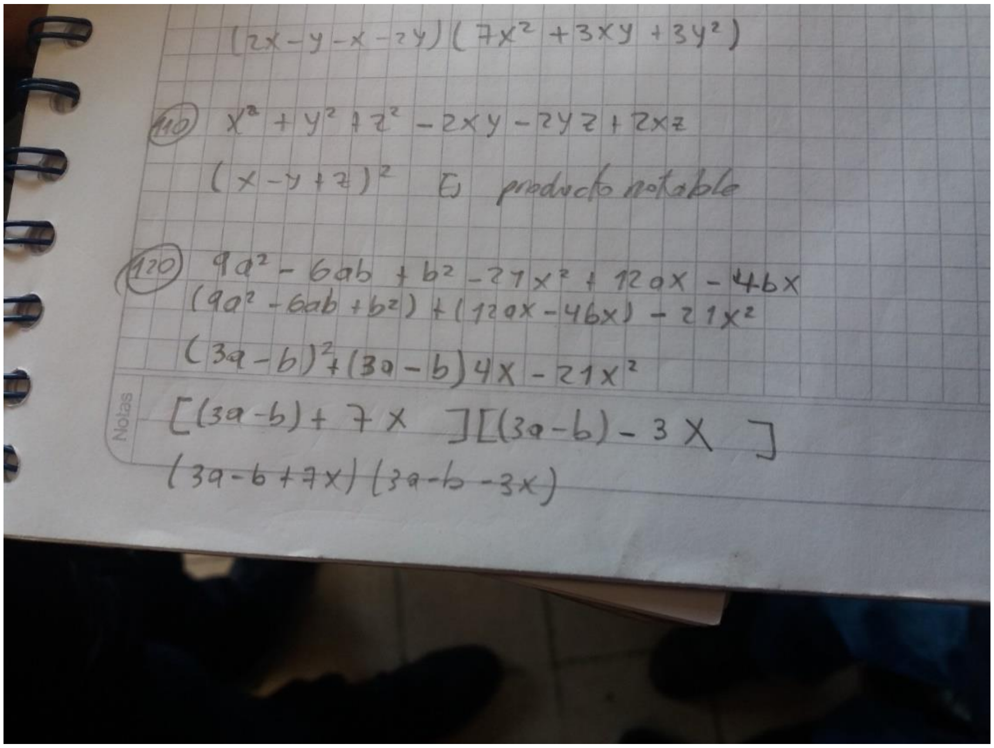
2º) En cada uno de los siguientes casos factorizar usando dos métodos distintos e indicar en cada caso el método empleado:

a) $x^2 + 6x + 9$ — b) $2x^2 + x - 6$
c) $x^3 - 3x^2 + x - 3$ — d) $x^3 + 1$.

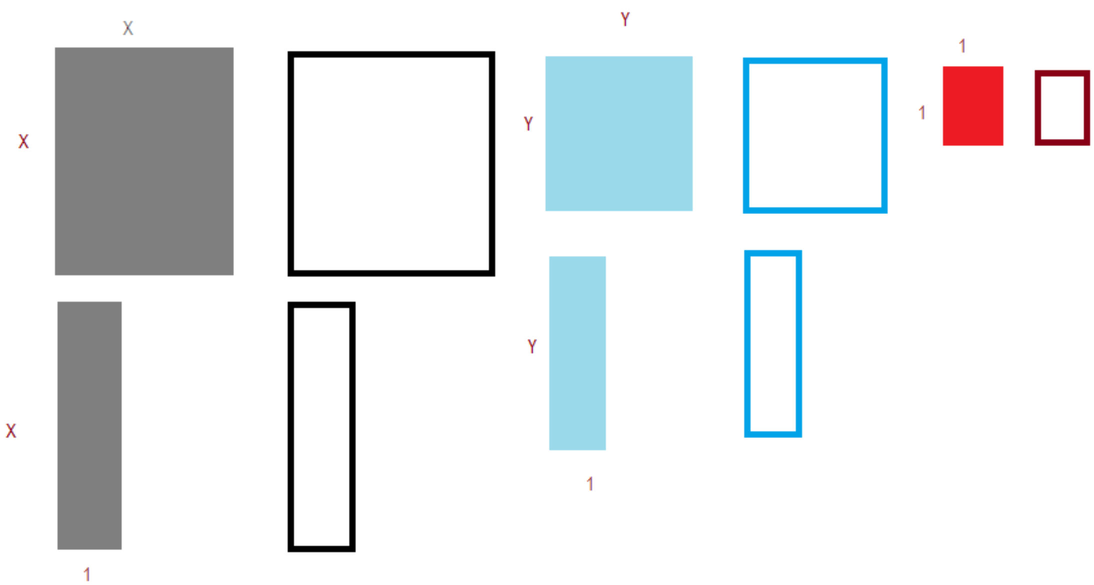
Anexo 8. Ejemplo de correo recibido con respuesta de comentario de comentario por parte del docente.



Anexo 9. Resolución del ejercicio literal 120. $\boldsymbol{9a^2 - 6ab + b^2 - 21x^2 + 12ax - 4bx}$



Anexo 10. Foto de la presentación en la pizarra para que se guíen los estudiantes y fotos del trabajo en aula laboratorio.


X
X
Y
Y
1
1
X
1
Y
1


SARAI
CHAMI

Anexo 11. Ejemplo de correo y fotos enviadas por los estudiantes.