Memorias
de la I Jornada Ecuatoriana de
GeoGebra

CONFERENCIAS

Objetos de aprendizaje-potencialidades de la vista tridimensional

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa[1]
Universidade Luterana do Brasil

Resumen

Esta conferencia presenta los objetos de aprendizaje tridimensionales para dar apoyo a la comprensión de conceptos matemáticos para los que la visualización propicia situaciones que permiten al estudiante identificar, realizar inferencias y generalizaciones. Se

---

1 Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pelo programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luetrana do Brasil (ULBRA). Professor da ULBRA do curso de Matemática Licenciatura e da Engenharia e participa de projetos de ensino com tecnologías. Entusiasta da robótica e do GeoGebra, procura colocar o lúdico no ensino da Matemática, levando significado aos conceitos matemáticos ao interliga-los com a realidade. Correo electronico: iaqchan@hotmail.com;iaqchan@ulbra.br

desarrollaron objetos de aprendizaje para el Cálculo Diferencial e Integral de Funciones Multivariadas para la derivada direccional, curvas de nivel e integrales dobles. Para el estudio de la representación polar, los objetos de aprendizaje se presentan en la forma de simuladores robóticos, para los que los estudiantes utilizan comandos, en forma polar, del movimiento a ser realizado. Las actividades con los materiales desarrollados deben ser organizadas en secuencias didácticas que permiten el aprendizaje a través de la construcción de los conceptos involucrados con soporte en la visualización de los objetos matemáticos, sus características y propiedades.

Palabras clave: Educación matemática, GeoGebra, Objetos tridimensionales.

Objetos de aprendizagem - potencialidades da visualização tridimensional

Resumo

Esta conferência apresenta os objetos de aprendizagem tridimensionais desenvolvidos para dar apoio à compreensão de conceitos matemáticos para os quais a visualização propicia situações que permitem ao estudante identificar e realizar inferências e generalizações. Foram desenvolvidos objetos de aprendizagem para o Cálculo Diferencial e Integral de funções multivariadas para a compreensão da derivada direcional, curvas de nível e integrais duplas. Para o estudo da representação polar foram os objetos de aprendizagem são apresentados na forma de simuladores robóticos, os quais os alunos utilizam comandos na forma polar do movimento a ser realizado. As atividades com os materiais desenvolvidos devem ser organizadas em sequências didáticas que permitam a aprendizagem através da construção dos conceitos envolvidos com suporte na visualização dos objetos matemáticos, suas características e propriedades.

Keywords: Educação Matemática, GeoGebra, Objetos tridimensionais.

Introdução

A visualização, como uma maneira de organizar o pensamento e dar suporte a compreensão dos conceitos matemáticos, vem sendo abordada em pesquisas que trazem como pauta das discussões, o ensino que valoriza a construção dos conceitos em detrimento dos processos algorítmicos. Os estudos sobre a visualização originaram-se na área da psicologia que estabelece a relação das habilidades de visualização com as habilidades cognitivas espaciais (Lohman, 1996).

Ressalta-se que o processo de visualização é uma ação mental ou física a nas quais as imagens mentais estão envolvidas. São considerados dois processos na visualização, a interpretação de informação para criar imagens mentais e a interpretação da imagem mental para gerar informação, com a segunda entendida como: a observação e análise de imagens mentais; a transformação de imagens mentais em outras imagens; e a transformação de imagens em outro tipo de informação (Gutiérrez, 1996).

Se na psicologia as pesquisas sobre visualização, habilidade espacial e imagem mental são de longa data, na educação matemática estes estudos iniciam na década de 80, sendo fundamentados nos estudos da psicologia cognitiva e considerando os aspectos do pensamento visual na aprendizagem matemática, no campo da didática da matemática, semiótica e perspectivas sócio-culturais (Flores, Wagner, & Buratto, 2012).

De acordo com o contexto, psicologia, matemática ou educação matemática, o termo visualização é interpretado de maneira diferente. Segundo Gutiérrez (1996), na educação matemática, são usados desenhos, figuras, diagramas, representações computacionais como parte das atividades diárias nas salas de aula. De modo que os educadores matemáticos consideram que a imagem mental e as representações externas têm que interagir para uma melhor compreensão e solução da situação problema.

Na educação matemática o recurso visual permite a associação das imagens a conceitos e, nesse âmbito desenvolve-se os objetos de aprendizagem para a aprendizagem do Cálculo para funções multivariadas e a representação polar. Sendo a habilidade espacial considerada como a habilidade de gerar, reter, recuperar e transformar imagens visuais (Lohman, 1996), é necessário o acesso a essa informação, na forma de imagem, para que ela possa ser reproduzida mentalmente ou externamente para a resolução de um problema.

As pesquisas para o desenvolvimento dos objetos de aprendizagem tridimensionais, as sequências didáticas e a sua aplicação em sala de aula, estão vinculadas aos aspectos didáticos da aprendizagem matemática. Os trabalhos consideram que a abstração, o raciocínio e a lógica são essenciais para a aprendizagem matemática, e valorizam mais a compreensão do que o processo algorítmico, fazendo uso das imagens como um suporte ao pensamento matemático, propiciando um ambiente experimental interativo que possibilita ao aluno realizar conjecturas e, em um processo de interação, observação e reflexão para generalizar propriedades e abstrair conceitos.

Os objetos de aprendizagem tridimensionais

Segundo Merril (2002), objetos de aprendizagem sem um design instrucional são somente objetos de conhecimento. Para Cálculo Diferencial e Integral, envolvendo funções de duas variáveis, foram desenvolvidos objetos de aprendizagem que proporcionam ao estudante situações para explorar e formular conjecturas, confrontando conceitos e conhecimentos prévios apresentados no estudo de funções de uma variável independente.

A figura 1 apresenta o objeto de aprendizagem para o estudo da derivada direcional com vista tridimensional anáglifa. Na janela a esquerda introduz-se a função, e manipula-se o ponto e a direção para a derivada direcional. Na janela tridimensional o estudante visualiza o plano tangente no ponto selecionado e a projeção do vetor direção. Os botões permitem que sejam ocultadas a função, o vetor direção e o plano tangente, diminuindo a quantidade de objetos gráficos para facilitar a visualização e exploração de situações.

Figura 1.

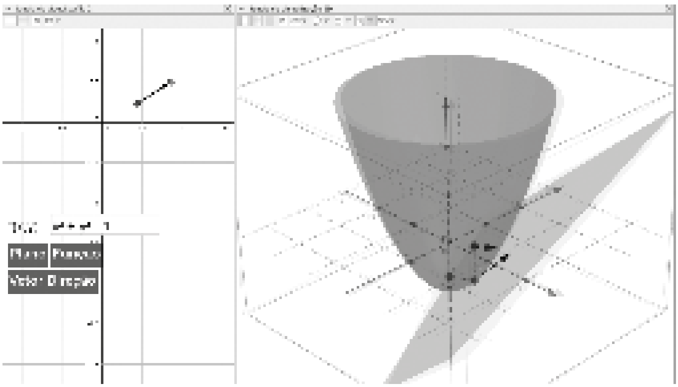

Figura 1. Objeto de aprendizagem para o estudo da derivada direcional
Fonte: O autor.

A atividade com o este objeto de aprendizagem é organizada e orientada fazendo uso de questionamentos utilizando os conhecimentos prévios de funções de uma variável e pode ser iniciada com o paraboloide $f(x,y)=x^2+y^2-1$.

- Qual o valor de $f(x_1,y_1)$,$f(x_2,y_2)$ e $f(x_3,y_3)$? Escolhendo os pontos para gerar as situações de valor positivo, negativo e zero.
- No ponto (x_1,y_1) a função é crescente ou decrescente? O objetivo é que o aluno veja a necessidade de se adotar uma direção pois somente com o ponto não é possível afirmar a característica de variabilidade da função.
- Relembrando que na função de uma variável temos um ponto crítico quando a taxa de variação é zero, ou seja, $\frac{af}{ax}=0$. Para o ponto (x_2, y_2) (que não é um ponto crítico da função) temos um ponto de máximo ou de mínimo? Nesse ponto existe uma direção em que a taxa de variação é nula? Então porque não é ponto crítico? Para esses

questionamentos deve-se ativar o vetor direção e o plano tangente do objeto de aprendizagem para que, através de experimentações, o estudante identifique a variação é nula somente em duas direções.

- A função tem um ponto de máximo ou de mínimo definido? Quais são as características de variação nesse ponto? (Manipulando o ponto o estudante é levado a encontrar o ponto de mínimo do paraboloide e, realizando mudanças no vetor direção, identifica que a taxa de variação permanece nula mesmo com a mudança de direção do vetor).

A função $f(x,y)=x^2-y^2+1$ tem um ponto de máximo ou de mínimo definido? Quais são as características da função no ponto (0,0) ? (O hiperboloide de uma folha tem um ponto crítico que não é ponto de máximo ou de mínimo, mas um ponto de sela. Nesta situação o estudante, através da rotação do hiperboloide, verifica as propriedades do ponto crítico e comprova pela visualização que não basta somente uma de variação nula em todas as direções para que seja ponto de máximo ou de mínimo).

- A figura 2 apresenta o objeto tridimensional anáglifo para aprendizagem de curvas de nível e as integrais duplas para cálculo da região topológica delimitada pela função.

Figura 2.

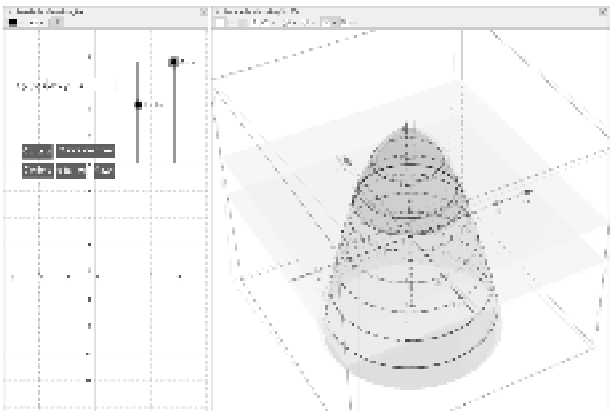

Figura 2. Objeto de aprendizagem para curvas de nível e estudo de regiões entre funções
Fonte: O autor.

Para o estudo de curvas de nível, o objeto possui botões para ativar o plano de corte paralelo ao plano XY. Para as curvas de nível tem-se disponível dois botões, um que controla o plano de intersecção paralelo ao plano XY e outro que apresenta as curvas para os valores inteiros de $f(x,y)$.

O estudante manipula o controle k e altera o plano paralelo ao plano XY que apresenta a curva de intersecção com a função identificando o que é a curva de nível. Manipulando o controle n, aparecem curvas de nível com valores inteiros para $f(x,y)$ e rotacionando a função para uma vista de topo o aluno visualizará as curvas de nível. Essa atividade permite a compreensão da relação entre a representação bidimensional das curvas de nível e a representação tridimensional da função.

Para o estudo das integrais duplas e regiões topológicas entre a função e o plano XY, o objeto, figura 3, disponibiliza botões para ativar o plano perpendicular ao eixo x ou y, para dar suporte ao conceito da integral dupla. É possível usar da visualização para fazer um paralelo em relação a soma de Riemann como a soma das regiões definidas pelo plano manipulado. No painel esquerdo é possível manipular os pontos A, B, C e D que definem a região retangular "abaixo" da função e, consequentemente, os intervalos de integração.

Nos dois objetos o estudante insere a função que deseja estudar nos campos apropriados, possibilitando o estudo de quaisquer funções. O uso da representação geométrica tridimensional permite a interpretação do objeto estudado com noções de profundidade, evitando a perda de informação que ocorre na representação em perspectiva.

As imagens apresentadas no presente artigo foram reproduzidas com o recurso estereoscópico anáglifo e recomenda-se o uso dos óculos apropriados para melhor visualização.

Figura 3.

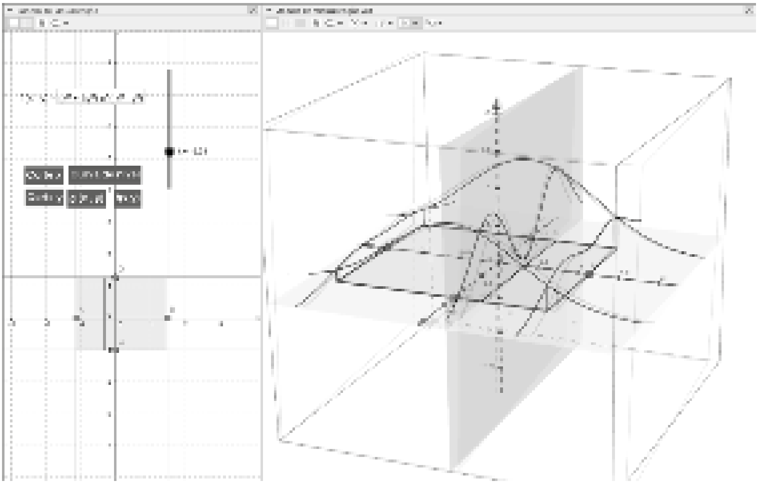

Figura 3. Objeto de aprendizagem para curvas de nível e estudo de regiões entre funções
Fonte: O autor.

Na disciplina de Cálculo são estendidos os conceitos de valor e variação das funções para que o estudante desenvolva a capacidade de, através das análises da função em um ponto, utilizar de estratégias preditivas para determinar as situações dos fenômenos associados ou representados pela função e assim decidir e tomar as ações quando necessário. Entende-se, deste modo, que o recurso visual proporciona situações para a compreensão das características da função em um ponto.

Os simuladores robóticos tridimensionais propiciam situações nas quais o ambiente de interação possibilita ao aluno identificar a necessidade de referenciar os objetos no espaço na representação polar, pois assim se movimentam os braços robóticos, com rotações e extensões.

Foram desenvolvidos dois simuladores robóticos o primeiro, Figura 4, apresenta um braço robótico que rotaciona sobre sua base e estende seu braço. O objeto de aprendizagem coloca uma bola aleatoriamente no plano e, para que o braço a pegue é necessário informar quanto o braço estende e rotaciona. Recomenda-se que os alunos tentem pegar a bola e verifiquem que há a necessidade de um cálculo a ser realizado para que a bola seja pega.

Figura 4.

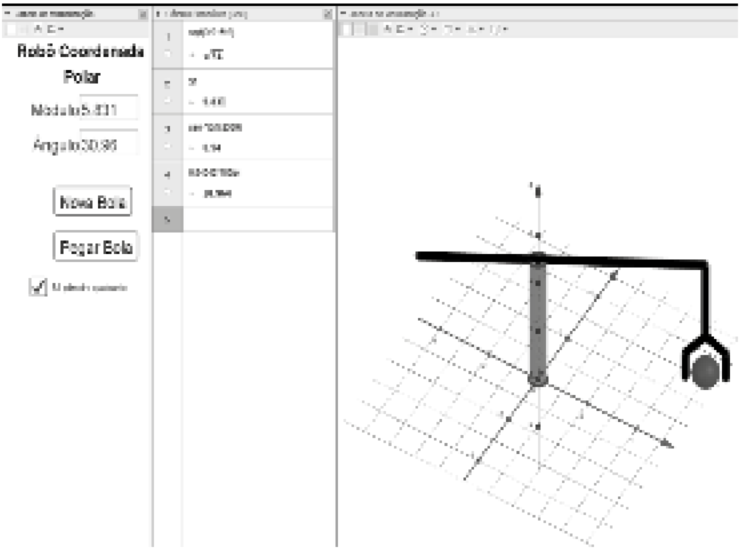

Figura 4. Simulador robótico 1 para aprendizagem da representação polar
Fonte: O autor.

A interação na janela 3D permite que o aluno identifique o triângulo retângulo formado pelas coordenadas e o braço do robô, sendo possível que o mesmo calcule quanto o braço deve estender para pegar a bola.

Para o cálculo da rotação pode-se valer do uso das operações trigonométricas inversas como o arcoseno ou arcotangente, determinando assim o valor que o braço deve rotacionar. Também é possível utilizar a janela de CAS para que o GeoGebra determine o valor do ângulo, mas sendo o objetivo do objeto de aprendizagem apresentar a representação polar considera-se oportuno o ensino das operações trigonométricas inversas.

Na Figura 5, apresenta-se o segundo simulador robótico que se assemelha mais aos braços robóticos reais. Este simulador deve ser apresentado posteriormente ao primeiro simulador para que o aluno já identifique quais os cálculos devem ser realizados. Por este simulador representar um braço articulado é necessário que seja calculado o ângulo de abertura para que se consiga a distância entre a base e a bola a ser pega. Para esse cálculo utiliza-se da lei dos cossenos $a^2=b^2+c^2-2bc \cos \theta$, para b e c o tamanho dos segmentos do braço robótico e a distância entre a base e a bola. Nesta situação utiliza-se o arco cosseno para determinar o ângulo de abertura do braço.

Figura 5.

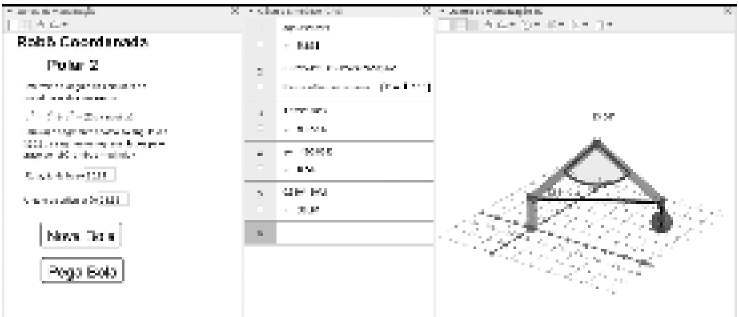

Figura 5. Simulador robótico 2 para aprendizagem da representação polar
Fonte: O autor.

Deste modo nos simulares robóticos a representação polar tem um significado prático e útil, proporcionando situações para que o aluno desenvolva a capacidade de identificar a qual a melhor representação espacial de acordo com a situação problema que se apresenta.

Ressalta-se que os simuladores propiciam a introdução às operações trigonométricas inversas devendo ser explorado as situações posicionais da bola para chamar a atenção aos arcos côngruos como é o caso quando a bola está no segundo e terceiro quadrantes. Também chamamos a atenção que os resultados das operações trigonométricas inversas são em radianos e requerem a conversão para graus.

Conclusão

O uso do GeoGebra para estudos das funções multivariadas, ofereceu a experimentação de situações diferenciadas que possibilitaram a observação das características e propriedades geométricas dos objetos para formulação de conjecturas e compreensão dos conceitos matemáticas estudados como a derivada direcional, os pontos críticos de funções multivariadas, a representação por curvas de nível e a região topológica delimitada pela superfície e o plano XY.

Os objetos de aprendizagem para as funções multivariadas são utilizados nas turmas das engenharias da ULBRA e percebeu-se que a há uma melhora na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, não ficando na operacionalização sistemática e algébrica para o cálculo de pontos críticos e integrais duplas. Os alunos externam que representações tridimensionais estereoscópicas (utilizando óculos 3D) auxiliam no entendimento da variabilidade da função pela visualização e interação com os objetos tridimensionais, levando a compreensão das características das funções multivariadas em um determinado ponto. Os simuladores robóticos estão sendo aplicados em classes experimentais do curso Licenciatura em Matemática e ainda não formalizamos os resultados.

Referencias bibliográficas

Flores, C., Wagner, D., & Buratto, I. (2012). Pesquisa em visualização na educação matemática : conceitos, tendências e perspectivas. *Educação Matemática Pesquisa, 14*(1), 31–45.

Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In *Proceedings of the 20th PME Conference,* 1, 3–19 https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Lohman, D. (1996). Spatial Ability and g. In *Human Abilities: Their Nature and Measurement,* pp. 97–116. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Merrill, D. (2002). Position statement and questions on learning objects research and practice. In *Learning objects technology: Implications for educational research and practice, AERA.* New Orleans. Retrieved from http://www.learndev.org/LearningObjectsAERA2002.html