Curvas y lugares geométricos con GeoGebra

Curves and Geometric Locations with GeoGebra

Agustín Carrillo de Albornoz Torres[5]

Resumen

De todos son conocidas las opciones que GeoGebra ofrece para representar cualquier función o para obtener la representación de un lugar geométrico a través de la herramienta del mismo nombre, cuando el lugar está determinado por un punto.

Cuando el lugar no está determinado por un punto hay que recurrir a las opciones que permiten la animación y el trazo para simular el lugar generado a través de envolventes, lo que ofrece un amplio abanico de posibilidades para generar nuevas curvas a través del movimiento.

GeoGebra también ofrece la posibilidad de obtener la ecuación de un lugar generado con la herramienta Lugar geométrico e incluso el construido a través de envolventes. Como estas opciones no siempre devuelven la ecuación hay que buscar nuevos métodos como puede ser recurrir a las posibilidades que ofrece la Vista CAS para determinar dichas ecuaciones.

Palabras clave: curva, ecuación, lugar geométrico

[5] España. Embajador de GeoGebra para Iberoamérica. Instituto GeoGebra de Andalucía (España). agustincarrillo@fespm.es

Abstract

The options that GeoGebra offers to represent any function or to obtain the representation of a geometric place through the tool of the same name are known by all, when the place is determined by a point.

When the place is not determined by a point, it is necessary to resort to the options that allow animation and the stroke to simulate the place generated through envelopes, which offers a wide range of possibilities to generate new curves through movement.

GeoGebra also offers the possibility of obtaining the equation of a place generated with the Geometric Place tool and even that built through envelopes. As these options do not always return the equation, it is necessary to look for new methods such as using the possibilities offered by the CAS View to determine these equations.

Keywords: curve, equation, locus

Introducción

Suponemos que por todos es conocida la herramienta Lugar geométrico, así como las opciones que permiten construir un lugar descrito por un punto que se mueve a partir de unas determinadas condiciones, siendo necesario recurrir a otras opciones como son la animación y el trazo para representar lugares descritos por otros objetos como rectas, segmentos, circunferencias, etc.

En el siguiente texto expondremos algunos ejemplos de construcción de lugares geométricos utilizando las opciones anteriores, ampliando con otras posibilidades, quizás menos conocidas, que esperamos sirvan para ampliar el campo de acciones que se podrán realizar con GeoGebra a través de las distintas vistas que ofrece, para finalizar con un proceso para generar nuevas curvas a partir de la vista CAS y por supuesto, de la vista gráfica para su representación.

Trazado de curvas como lugares geométricos

Comenzaremos utilizando la herramienta lugar geométrico para construir una curva; para la que necesitamos un punto que será el que describa el lugar, otro nuevo punto que será el que vaya cambiando su posición y por tanto, modificando las condiciones. Este segundo punto no puede ser un punto libre, debe ser un punto que se mueva sobre otro objeto.

Por ejemplo, si deseamos obtener el lugar geométrico descrito por el punto Q que resulta de la intersección de la recta tangente a la circunferencia por un punto A de ella y la recta perpendicular a la tangente anterior por un punto P exterior a la circunferencia, realizaremos los pasos siguientes: en primer lugar, creamos los objetos necesarios como son la circunferencia, un punto A sobre ella y un punto P exterior.

A continuación, trazamos la recta tangente a la circunferencia por el punto A (herramienta Tangente) y la recta perpendicular a la tangente anterior por el punto P (herramienta Recta perpendicular), determinando el punto Q intersección de las dos rectas (herramienta Intersección).

Por último, solo queda seleccionar la herramienta Lugar geométrico marcando el punto P (punto que describirá el lugar) y el punto A que será el punto que se mueva sobre la circunferencia, que hará que las condiciones vayan cambiando.

El resultado será una curva denominada caracol de Pascal que aparece representada en la figura siguiente.

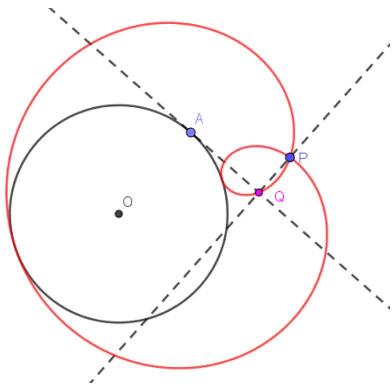

Figura 6. El caracol de Pascal como lugar geométrico.

A partir del lugar obtenido con la herramienta Lugar geométrico o con el comando LugarGeométrico, que en el caso anterior tendría sería LugarGeométrico(Q, A), también se pude determinar la expresión de su ecuación con ayuda del comando EcuaciónLugar, escribiendo como argumentos el nombre asignado al lugar o los puntos que lo determinan, es decir EcuaciónLugar(Q, A), devolviendo como resultado la ecuación implícita del lugar representado.

- lugar1 = LugarGeométrico(Q, A)
- ec1: $625x^4 - 5900x^3 + 1250x^2 y^2 - 1950x^2 y + 8299x^2 - 5900x y^2 + 9204x y + 53100x + 625y^4 - 1950y^3 - 4104y^2 + 17550y = 139005$

Curva implícita **ec1**: EcuaciónLugar(Q, A)

Figura 2. Ecuación del lugar geométrico.

Pero ¿qué ocurre cuando el lugar que se desea obtener no está generado por un punto? En estos casos hay que recurrir a las opciones descritas anteriormente de animación y trazo.

Supongamos los objetos siguientes: una circunferencia, un punto A en la circunferencia y un punto P interior a la circunferencia. Para obtener el lugar geométrico que describen las mediatrices del segmento AP cuando A recorre la circunferencia, la única opción que nos queda es usar la animación de A, activando previamente el trazo de la mediatriz para que aparezca el lugar descrito por las envolventes de las mediatrices.

El lugar aparece representado en la figura 3, cuyo resultado es una elipse cuyos focos son el punto P y el centro de la circunferencia inicial.

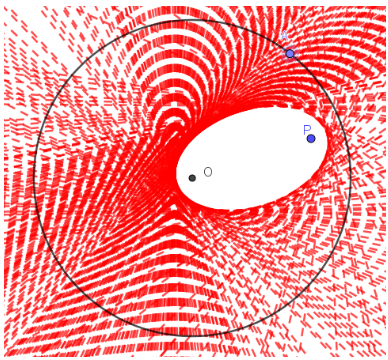

Figura 3. Elipse obtenida como envolvente

Cuando se utiliza la herramienta Lugar geométrico, al cambiar las condiciones iniciales el lugar se actualizará, algo que no ocurre cuando se usa animación y rastro ya que el resultado del rastro no es un objeto reconocible por GeoGebra. En este caso, si deseamos determinar qué ocurre con el lugar cuando el punto P es exterior a la circunferencia, será necesario, antes de volver a animar el punto A, borrar el trazado anterior, para lo que bastará con pulsar Ctrl-F.

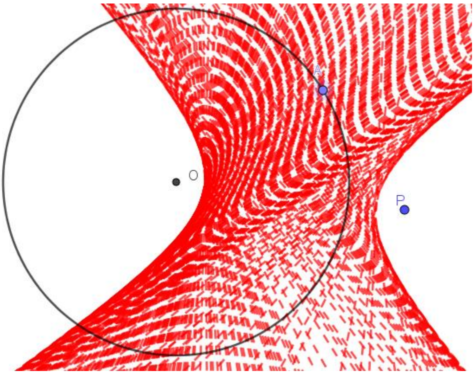

Figura 4. Hipérbola obtenida como envolvente

Solo queda obtener la parábola siguiendo el mismo proceso, para lo que bastara con utilizar una recta, un punto A en la recta y un punto P que no pertenezca a ella.

Estás curvas se pueden obtener directamente utilizando el comando Envolvente, indicando como argumentos el objeto que describe la envolvente y el punto que se mueve, en el caso anterior, será la mediatriz y el punto A. El resultado aparece en la imagen 5.

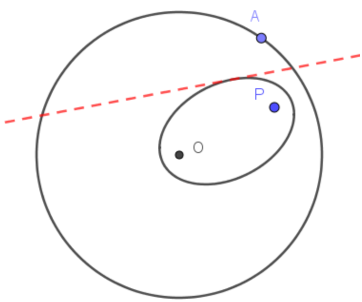

Figura 5. Lugar geométrico obtenido a partir de envolventes.

Apareciendo además su ecuación en la vista algebraica.

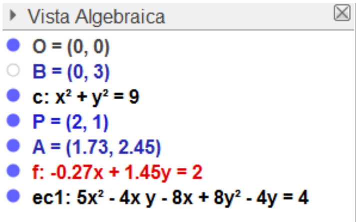

Figura 6. Ecuación del lugar geométrico obtenido a partir de envolventes.

Con procesos similares, según cada caso, se podrán construir algunas curvas famosas o curvas con nombre, por ejemplo, la bruja de Agnesi, lo que facilitará que además de trabajar sobre su construcción, permita introducir conceptos históricos.

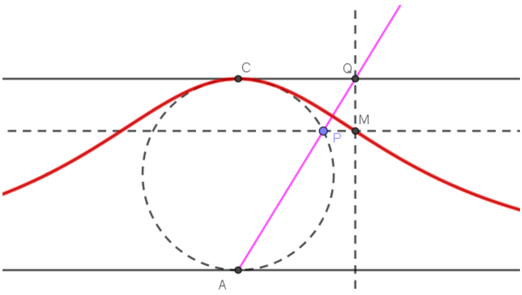

Figura 7. La bruja de Agnesi.

Curvas en movimiento

Otros procesos que permiten obtener nuevos lugares geométricos serán aquellos en los que se parte de unos objetos en movimiento para determinar que curva describirá un determinado punto o para determinar qué ocurre cuando cambian las velocidades del movimiento de los objetos que interviene en la construcción.

Por ejemplo, a partir de una circunferencia deseamos crear una nueva circunferencia que ruede sobre la anterior. La dificultad de estas construcciones radica en el proceso para simular el desplazamiento de una circunferencia sobre la otra.

Una vez establecido el movimiento se podrá determinar la curva que describe un punto de la segunda circunferencia cuando rueda por el exterior o por el interior de la circunferencia inicial; incluyo con ayuda de deslizadores observar qué efectos produce el cambio en los radios de las respectivas circunferencias.

En las imágenes 8 y 9 aparecen las curvas descritas cuando la circunferencia rueda exteriormente o interiormente.

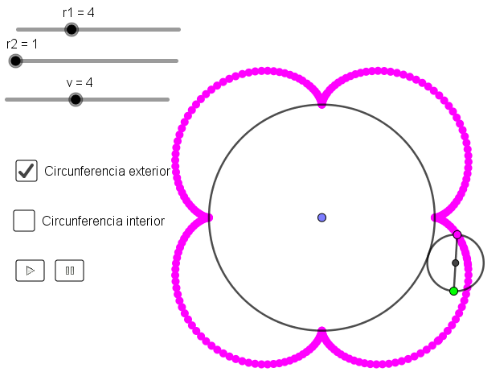

Figura 8. Circunferencia exterior.

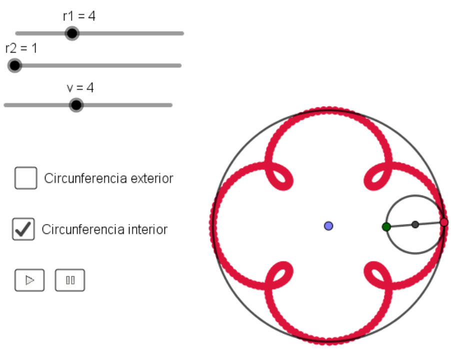

Figura 9. Circunferencia interior.

La misma curva se puede obtener siguiendo procedimientos distintos, tal y como aparecen en las imágenes 10 y 11, en la que el astroide se obtiene siguiendo el movimiento anterior de una circunferencia que rueda interiormente sobre otra circunferencia, y en el segundo caso a partir de envolventes (https://www.geogebra.org/m/TJeNNMsC).

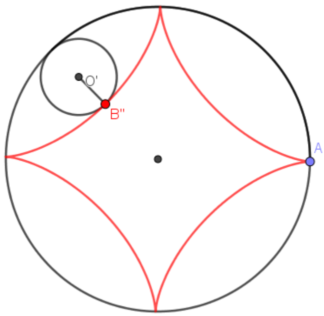

Figura 10. Astroide.

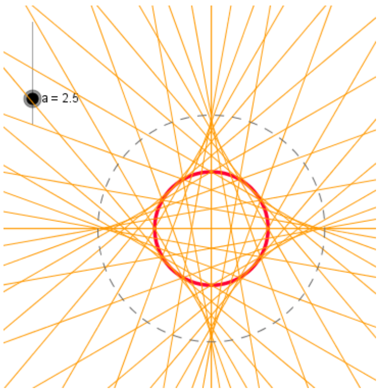

Figura 11. Astroide como envolvente.

Establecer condiciones para un lugar geométrico

Hasta ahora estamos acostumbrados a determinar un lugar geométrico a partir de un punto que depende de otro objeto, pero no de un punto libre.

Por ejemplo, si tenemos tres puntos libres A, B y C, podemos pensar en qué lugar se debe encontrar C para que las distancias AC y BC sean iguales. Es evidente que C se debe encontrar en la mediatriz del segmento AB, pero lo que queremos es que GeoGebra sea capaz de determinar esa condición.

Cada vez le pedimos más a GeoGebra, pero hasta ahora su equipo de desarrollo está logrando muchos avances y en este sentido el equipo que está desarrollando opciones de demostración automática, en el que se encuentra mi buen amigo Tomás Recio Muñiz, ha logrado resolver este problema.

Para ello, utilizaremos el comando EcuaciónLugar, indicando la condición que deseamos establecer y el punto que buscamos que lo cumpla. Escribiremos:

EcuaciónLugar(Distancia(A,C)==Distancia(B,C),C)

El resultado como era de esperar será la mediatriz del segmento AB, lo que nos indica que C se tiene que encontrar en esa recta para que se cumpla la condición pedida, apareciendo además su ecuación en la vista algebraica.

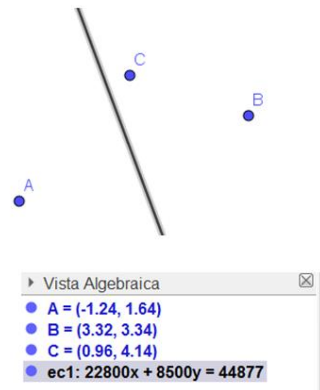

Figura 12. Condición para determinar un lugar.

Un nuevo ejemplo podemos obtener también a partir de tres puntos libres A, B y C, buscando la condición que debe cumplir C para que el triángulo ABC sea rectángulo en el vértice C. En este caso, la condición que debemos establecer en el comando EcuaciónLugar será:

EcuaciónLugar(a²+b²==c²,C)

Como resultado aparecerá la circunferencia cuyo diámetro es AB, por lo que C tendrá que estar sobre dicha circunferencia para que se cumpla la condición de ser un triángulo rectángulo.

Otras curvas como lugares geométricos

El caracol de Pascal obtenido como primer lugar geométrico es una curva que pertenece al grupo de curvas denominadas podarías.

Una podaría o curva pedal d una curva "c" con respecto al punto B, se denomina al lugar geométrico de los puntos de intersección de la recta tangente a "c" por el punto A, con la recta perpendicular a dicha tangente por el punto B.

Supongamos como curva la función cuadrática $f(x) = x^2$, tomando como punto B el origen de coordenadas, siendo A un punto cualquiera de la parábola anterior. Utilizando las herramientas disponibles, podemos obtener la podaría con respecto a B, trazando la recta tangente a la función cuadrática por el punto A; determinando a continuación, el punto P de intersección de la recta perpendicular por B a la recta tangente anterior.

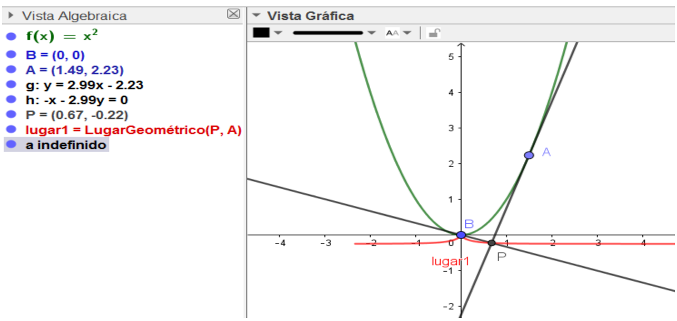

Figura 13. Podaria de la función cuadrática con respecto al origen.

Podemos observar en la imagen anterior que si pedimos la ecuación del lugar obtenido aparece como indefinido, por lo que GeoGebra no ha sido capaz de obtener su expresión. Eso no significa que no sea posible determinar la ecuación, aunque para ello, es necesario recurrir a la vista CAS para aplicar los comandos correspondientes a cada uno de los pasos que previamente se han realizado para representar la podaría.

En la vista gráfica y algebraica el punto A era un punto concreto, aunque estaba sobre la función cuadrática, sus coordenadas en cada momento eran valores numéricos. Sin embargo para iniciar este proceso, necesitamos un punto genérico que será (t, t^2).

Para obtener la recta tangente a la función f por el punto genérico anterior, bastará con ejecutar, no olvidemos que estamos en la vista CAS, el comando Tangente((t,t2),f), obteniendo como resultado la recta $y = -t^2 + 2\,t\,x$.

El siguiente paso será determinar la recta perpendicular a la recta anterior por el punto B que era el origen de coordenadas. Para ello, basta con ejecutar el comando Perpendicular(B, $1) ya que la expresión de la tangente se encuentra en la línea 1 de la vista CAS. El resultado será la recta $y = \frac{-1}{2t}x$.

A continuación, el punto de intersección entre las dos rectas se obtiene usando el comando Interseca. El resultado será un punto cuyas coordenadas corresponden a las ecuaciones paramétricas de la curva buscada, es decir de la podaria, tal y como aparece en la imagen siguiente que recoge las instrucciones ejecutadas en la vista CAS.

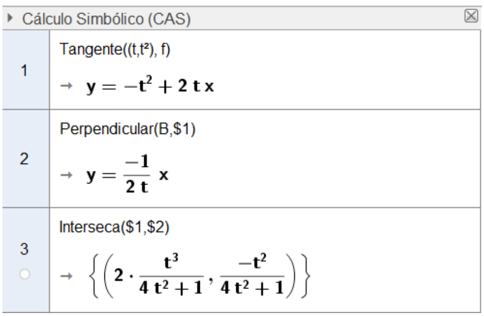

Figura 14. Secuencia de comandos para obtener la podaría desde la vista CAS.

Por último, solo queda convertir la expresión anterior en otra que nos permita determinar la ecuación implícita de la podaría que previamente no había aparecido.

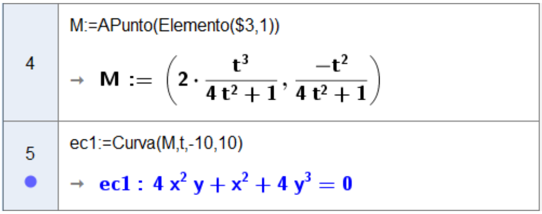

Figura 15. Ecuación implícita de la podaria.

Curva que evidentemente aparecerá representada en la vista gráfica.

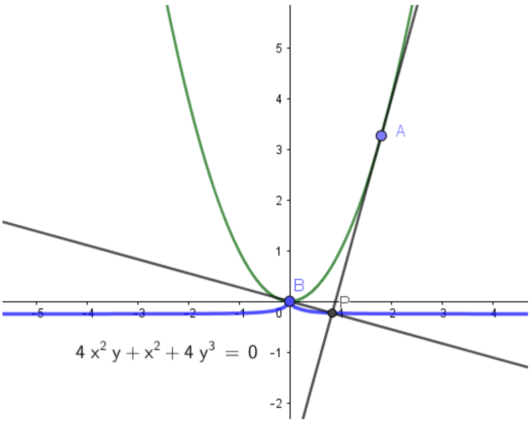

Figura 16. Secuencia de comandos para obtener la podaría desde la vista CAS.

Conclusión

Hemos intentado mostrar distintas opciones, quizás menos conocidas que la herramienta Lugar geométrico, animación y trazo, mostrando ejemplos sencillos para llevarlos al aula, intentando buscar las opciones disponibles para solucionar aquellas respuestas que GeoGebra no devuelve de forma directa.

Además, el último proceso que hemos seguido recurriendo a la vista CAS para ejecutar paso a paso todas las tareas seguidas en la construcción de un lugar, constituye un método que es válido para cualquier función sin más que cambiar el punto genérico que dicha vista requiere.

Los pasos seguidos no resultan excesivamente complicados, por lo que estas construcciones se podrán exponer al alumnado de niveles educativos como Secundaria, Bachillerato y por supuesto Educación Superior.

GeoGebra siempre nos asombra y aquello que no se obtenga directamente, basta aplicar las matemáticas que conocemos para poder logarlo.

Referencias Bibliográficas

Carrillo de Albornoz, A. & Llamas, I. (2009). *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*. Madrid: RA-MA Editorial.

Carrillo de Albornoz, A. & Recio, T. (2020). De curva a curva con GeoGebra.Boletín Sociedad "Puig Adam" de Matemáticas, 110, 8-25.

Hohenwarter, M. & Kovács, Z. & Recio, T. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, Vol 100, 79-84*.